Mikroökonomik – 13. Vorlesungswoche

Tone Arnold

Universität des Saarlandes

27. Januar 2008

Übersicht Nutzenmaximierung und Ausgabenminimierung

Nutzenmaximierung: $\max_{x_1,x_2} u(x_1,x_2)$ u. d. N. $p_1 x_1 + p_2 x_2$ Lösung: Marshall Nachfrage $x_1(p_1,p_2,m), x_2(p_1,p_2,m)$	Ausgabenminimierung: $\min_{x_1,x_2} p_1 x_1 + p_2 x_2$ u. d. N. $u(x_1,x_2) = \bar{u}$. Lösung: kompensierte Nachfrage $x_1^k(p_1,p_2,\bar{u}), x_2^k(p_1,p_2,\bar{u})$
indirekte Nutzenfunktion: $v(p_1,p_2,m) =$ $u(x_1(p_1,p_2,m), x_2(p_1,p_2,m))$	Ausgabenfunktion: $e(p_1,p_2,\bar{u}) =$ $p_1 x_1^k(p_1,p_2,\bar{u}) + p_2 x_2^k(p_1,p_2,\bar{u})$
Roy's Identität $x_i(p_1,p_2,m) =$ $-\frac{\partial v(p_1,p_2,m)/\partial p_i}{\partial v(p_1,p_2,m)/\partial m}$	Shephard's Lemma: $x_i^k(p_1,p_2,\bar{u}) = \frac{\partial e}{\partial p_i}$

Übersicht Gewinnmaximierung und Kostenminimierung

Kostenminimierung: $\min_{x_1,x_2} w_1x_1 + w_2x_2$ u. d. N. $f(x_1,x_2) = \bar{y}$ Lösung: bedingte Faktornachfrage $x_1(w_1,w_2,y), x_2(w_1,w_2,y)$	Gewinnmaximierung: $\max_{x_1,x_2} pf(x_1,x_2) - w_1x_1 - w_2x_2$ Lösung: Faktornachfrage $x_1(p,w_1,w_2), x_2(p,w_1,w_2)$
Kostenfunktion: $C(w_1,w_2,y) = w_1x_1(w_1,w_2,y) + w_2x_2(w_1,w_2,y)$	
Gewinnmaximierung: $\max_y py - C(w_1,w_2,y)$ Lösung: Angebotsfunktion $y(p,w_1,w_2)$	Angebotsfunktion: $y(p,w_1,w_2) = f(x_1(p,w_1,w_2), x_2(p,w_1,w_2))$
Gewinnfunktion: $\pi(p,w_1,w_2) = py(p,w_1,w_2) - C(w_1,w_2,y(p,w_1,w_2))$	Gewinnfunktion: $\pi(p,w_1,w_2) = py(p,w_1,w_2) - w_1x_1(p,w_1,w_2) - w_2x_2(p,w_1,w_2)$

Shephard's Lemma: $x_i(w_1,w_2,y) = \frac{\partial C}{\partial w_i}$	Hotelling's Lemma: $y(p,w_1,w_2) = \frac{\partial \pi}{\partial p}$ $x_i(p,w_1,w_2) = -\frac{\partial \pi}{\partial w_i}$

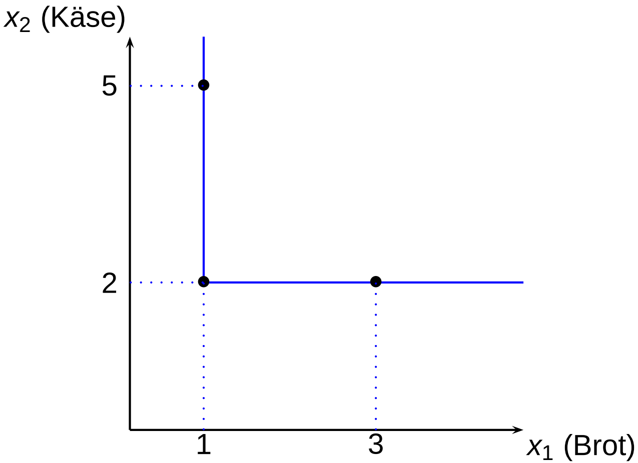
4 Arten von Nutzenfunktionen:

1. Perfekte Substitute: $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, $a, b > 0$.
2. Perfekte Komplemente (Leontief): $u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$, $a, b > 0$.
3. Cobb Douglas: $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, $\alpha, \beta > 0$.
4. Partielle Substitute: $u(x_1, x_2) = x_1^{0.5} x_2^{0.5}$.

Leontief Nutzenfunktion

- **Vollkommene Komplemente** möchte ein Konsument in einem bestimmten Verhältnis konsumieren.
- Mehr von einem Gut ist für den Konsumenten nicht besser, wenn nicht auch gleichzeitig mehr von dem anderen Gut konsumiert wird.
- Beispiel: Ein Käsebrot besteht aus 1 Scheibe Brot und 2 Scheiben Käse.

Indifferenzkurve bei Komplementen



Berechnung der Nachfrage

$u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$ mit $a, b > 0$.

Im Nutzenmaximum gilt: $ax_1 = bx_2$. Daraus folgt

$$x_2 = \frac{a}{b}x_1.$$

Dies setzen wir in die Budgetgleichung ein:

$$p_1x_1 + p_2\frac{a}{b}x_1 = m.$$

Ausklammern von x_1 ergibt

$$x_1\left(p_1 + \frac{a}{b}p_2\right) = m.$$

Leontief Nutzenfunktion

$$x_1 \left(p_1 + \frac{a}{b} p_2 \right) = m$$

$$\Rightarrow \; x_1 \left(\frac{bp_1 + ap_2}{b} \right) = m.$$

Auflösen nach x_1 ergibt die Nachfragefunktion nach Gut 1:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{mb}{bp_1 + ap_2}.$$

Die Nachfragefunktion nach Gut 2 ist dann

$$x_2(p_1, p_2, m) = \frac{a}{b} \cdot \frac{mb}{bp_1 + ap_2} = \frac{ma}{bp_1 + ap_2}.$$

Leontief Nutzenfunktion

Beispiel: $u(x_1, x_2) = \min\{2x_1, x_2\}$.

Im Nutzenmaximum gilt $2x_1 = x_2$. Einsetzen in die Budgetgleichung ergibt

$$p_1 x_1 + p_2 2x_1 = m \;\Rightarrow\; x_1(p_1 + 2p_2) = m.$$

Auflösen nach x_1 ergibt die Nachfragefunktion

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1 + 2p_2}.$$

Die Nachfrage nach Gut 2 ist doppelt so gross:

$$x_2(p_1, p_2, m) = \frac{2m}{p_1 + 2p_2}.$$

Berechnung der kompensierten Nachfrage

Die Ausgaben werden minimiert unter der Nebenbedingung $u(x_1, x_2) = \bar{u}$.

Es gilt:

$$\min\{ax_1, bx_2\} = \bar{u}.$$

Ausserdem gilt $ax_1 = bx_2$. Daraus folgt

$$ax_1 = bx_2 = \bar{u}.$$

Auflösen nach x_1 bzw. x_2 ergibt die kompensierten Nachfragefunktionen

$$x_1(p_1, p_2, \bar{u}) = \frac{\bar{u}}{a}, \quad x_2(p_1, p_2, \bar{u}) = \frac{\bar{u}}{b}.$$

Berechnung des Nutzenniveaus

Das Nutzenniveau berechnen wir, indem wir die Nachfragefunktionen in die Nutzenfunktion einsetzen. Dann erhalten wir die indirekte Nutzenfunktion, die den maximal öglichen Nutzen angibt, gegeben Preise und Einkommen.

Beispiel: $u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$.

Die Nachfragefunktionen sind

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1 + 2p_2}, \quad x_2(p_1, p_2, m) = \frac{2m}{p_1 + 2p_2}.$$

Die indirekte Nutzenfunktion ist

$$v(p_1, p_2, m) = a \cdot \frac{m}{p_1 + 2p_2} = b \cdot \frac{2m}{p_1 + 2p_2}.$$

Berechnung des Nutzenniveaus

Anderes Beispiel: Wir betrachten die Cobb Douglas Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

Die Nachfragefunktionen sind

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{m}{2p_1}, \quad x_2(p_1, p_2, m) = \frac{m}{2p_2}.$$

Das maximal erreichbare Nutzenniveau ist

$$v(p_1, p_2, m) = \frac{m}{2p_1} \cdot \frac{m}{2p_2} = \frac{m^2}{4p_1 p_2}.$$

Positiv monotone Transformation

Beispiel: Wir betrachten die Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

Die Tabelle gibt die Nutzenwerte für verschiedene Mengenkombinationen der beiden Güter an:

x_1	x_2	$u(x_1, x_2)$
1	1	1
1	2	2
2	2	4
10	3	30

Positiv monotone Transformation

Jetzt multiplizieren wir die Nutzenfunktion mit 5 und ziehen 100 ab. Dann erhalten wir eine neue Nutzenfunktion

$$n(x_1, x_2) = 5u(x_1, x_2) - 100 \;=\; 5x_1x_2 - 100.$$

Aus der Nutzentabelle sieht man, dass die Konsumpläne in der selben Reihenfolge bewertet werden wie bei $u(x_1, x_2)$:

x_1	x_2	$u(x_1, x_2)$	$n(x_1, x_2)$
1	1	1	-95
1	2	2	-90
2	2	4	-80
10	3	30	50

Positiv monotone Transformation

$n(x_1, x_2)$ ist eine **positiv monotone Transformation** von $u(x_1, x_2)$.

Positiv monotone Transformationen:

- Multiplikation mit einer positiven Konstanten, z.B. $n(x_1, x_2) = au(x_1, x_2)$ mit $a > 0$ (warum $a > 0$?).
- Addition einer beliebigen (positiven oder negativen) Zahl, z.B. $n(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) - 7$.
- Potenzieren mit einem ungeraden Exponenten, z.B. $n(x_1, x_2) = u(x_1, x_2)^3$.
- Jede mögliche Kombination der drei Möglichkeiten.

Positiv monotone Transformation

Achtung: Potenzieren mit einem geraden Exponenten ist i.d.R. **keine** postiv monotone Transformation, es sei denn, die ursprüngliche Nutzenfunktion nimmt nur nicht–negative Werte an. In diesem Fall ist auch das Wurzelziehen eine positiv monotone Transformation.

Positiv monotone Transformation

Beobachtung 1

- *Eine positiv monotone Transformation ändert nicht die Reihenfolge der Konsumpläne.*
- ***Jede*** *positiv monotone Transformation einer Nutzenfunktion stellt die selbe Präferenzordnung dar wie diese Nutzenfunktion.*
- *Daher gibt es für eine gegebene Präferenzordnung* ***keine eindeutige*** *Nutzenfunktion, sondern unendlich viele.*

Äquivalente Nutzenfunktion

Satz 1

(Äquivalente Nutzenfunktionen) Jede positiv monotone Transformation einer Nutzenfunktion ist eine ***äquivalente Nutzenfunktion****, d.h. sie stellt die selbe Präferenzrelation dar.*

Slutzky Zerlegung

Vier Arten von Gütern (aus der Sicht eines Konsumenten):

- Ein Gut heisst normal, wenn die Nachfrage nach dem Gut im Preis des Gutes sinkt:
$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} < 0.$$
- Ein Gut heisst superior, wenn die Nachfrage nach dem Gut im Einkommen zunimmt:
$$\frac{\partial x_1}{\partial m} > 0.$$

Slutzky Zerlegung

- Ein Gut heisst inferior, wenn die Nachfrage nach dem Gut mit zunehmendem Einkommen abnimmt:

$$\frac{\partial x_1}{\partial m} < 0.$$

- Ein Gut heisst Giffen Gut, wenn die Nachfrage nach dem Gut bei steigendem Preis zunimmt:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} > 0.$$

Inferiore Güter

Frage: Kann es sein, dass in einem 2–Güter Fall beide Güter inferior sind?

Antwort: Nein:

- Inferior bedeutet: Wenn das Einkommen sinkt, wird von dem Gut mehr nachgefragt.
- Angenommen, beide Güter wären inferior.
- Einkommen sinkt $\Rightarrow$ es wird von beiden Gütern mehr nachgefragt.
- Dann steigen die Ausgaben.
- Dies ist ein Widerspruch zu sinkendem Einkommen.

Slutzky Zerlegung

Die Slutzky Zerlegung zerlegt den Effekt einer Preisänderung auf die Nachfrage in zwei Teileffekte, den Substitutions– und den Einkommenseffekt.

Slutzky Zerlegung

Wir betrachten ausschliesslich die Slutzky Zerlegung nach der **Hicks–Methode**!

Slutzky Zerlegung

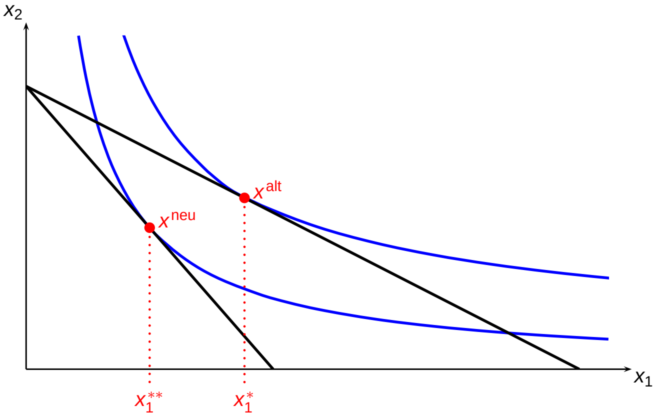
Zwei verschiedene Effekte einer Preiserhöhung auf die Nachfrage:

1. Das **Preisverhältnis** p_1/p_2 ändert sich, da die Steigung der Budgetgeraden steiler wird. Die daraus resultierende Änderung der Nachfrage heisst **Substitutionseffekt**.
2. Die **Budgetmenge wird kleiner**, d. h., die **Kaufkraft** des Einkommens, das nominal das gleiche geblieben ist, ändert sich. Die daraus resultierende Änderung der Nachfrage heisst **Einkommenseffekt**.

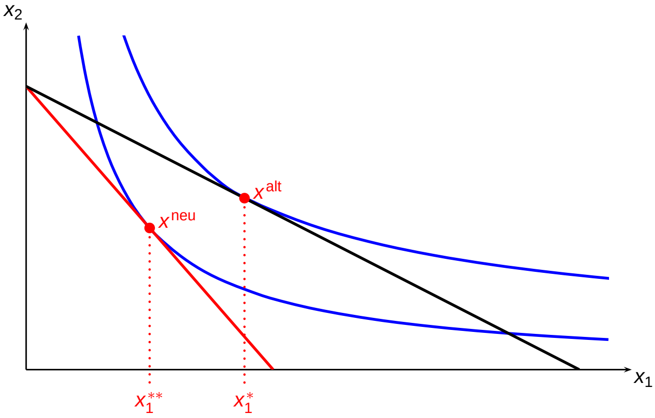
Substitutionseffekt

- Ziel: Der Kaufkrafteffekt soll eliminiert werden, so dass der Konsument vor und nach der Preisänderung das selbe Nutzenniveau erreichen kann. D.H., vor und nach der Preisänderung befindet er sich auf der selben Indifferenzkurve.
- **Gedankenexperiment:** Wir ersetzen das tatsächliche Einkommen durch ein **fiktives Einkommen**, dass gerade ausreicht, um den Konsumenten für die Preiserhöhung zu entschädigen.

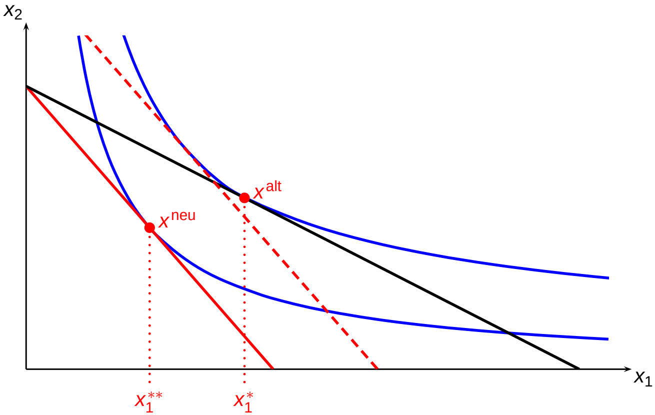
Substitutionseffekt

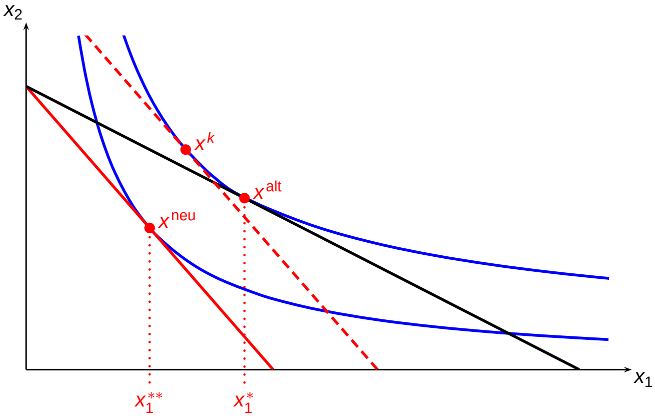


Substitutionseffekt

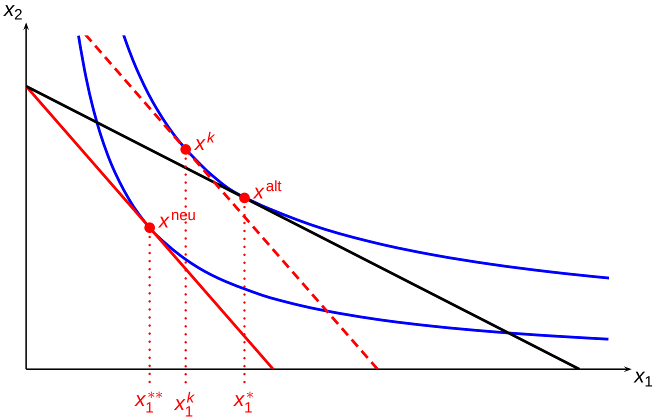


Substitutionseffekt

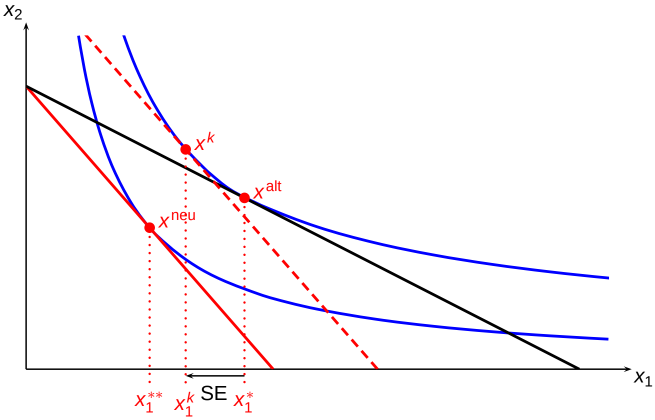



x_2
x^k
x^{alt}
x^{neu}
x_1
x_1^{**}
x_1^*

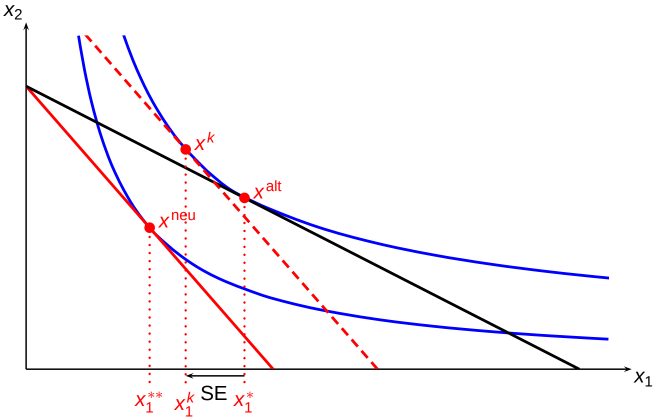
Substitutionseffekt



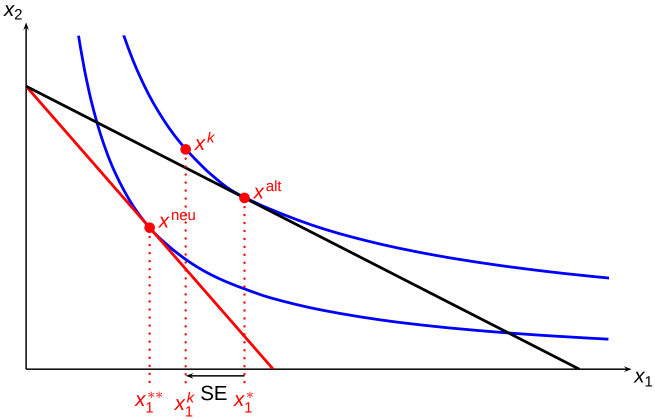
Substitutionseffekt



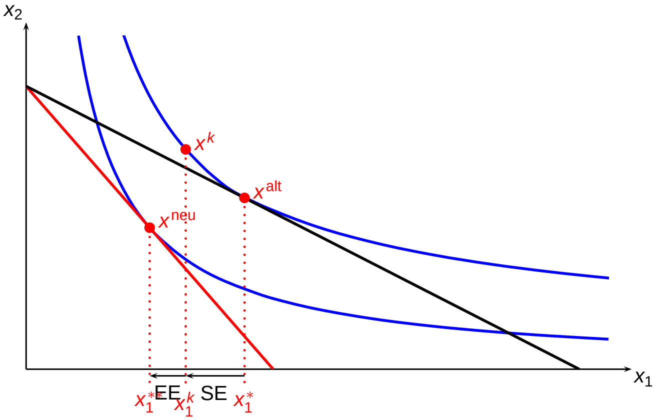
Einkommenseffekt



Einkommenseffekt



Einkommenseffekt



Beispiel: Wir betrachten die Cobb Douglas Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

Die Nachfragefunktionen sind

$$x_1 = \frac{m}{2p_1}, \; x_2 = \frac{m}{2p_2}.$$

Die Güterpreise sind $p_1 = p_2 = 5$ und das Einkommen beträgt $m = 120$. Dann fragt der Konsument 12 Einheiten von jedem Gut nach.

Jetzt steigt der Preis von Gut 1 auf $p_1' = 6$. Die Nachfrage nach Gut 1 sinkt daraufhin auf 10 Einheiten. Der Gesamteffekt der Preiserhöhung ist $10 - 12 = -2$.

Slutzky Zerlegung

Nun wollen wir diesen Gesamteffekt zerlegen.

Berechnung des Substitutionseffekts (SE):

- In Gedanken geben wir dem Konsumenten soviel Geld, dass er sein altes Nutzenniveau (von vor der Preiserhöhung) wieder erreicht.
- Sein altes Nutzenniveau war $12 \cdot 12 = 144$.
- Um beim Preis $p_1' = 6$ dieses Nutzenniveau zu erreichen, benötigt der Konsument zusätzliches Einkommen von m':

$$\frac{(m')^2}{4 \cdot 6 \cdot 5} = 144.$$

- Auflösen nach m' ergibt

$$(m')^2 = 17280 \;\Rightarrow\; m' = 131.45.$$

Slutzky Zerlegung

Damit der Konsument sein altes Nutzenniveau von 100 nach der Preiserhöhung wieder erreicht, müssen wir ihm $131.45 - 120 = 11.45$ € dazugeben.

Seine Nachfrage nach Gut 1 bei dem fiktiven Einkommen 131.45 und den Preisen $p_1' = 6$, $p_2 = 5$ ist

$$x_1(6, 5, 131.45) = \frac{131.45}{2 \cdot 6} = 10.95.$$

Der **Substitutionseffekt** ist nun die Differenz zwischen dieser Menge und der Nachfrage des Konsumenten vor der Preiserhöhung:

$$\text{SE} = 10.95 - 12 = -1.05.$$

D.h., der Substitutionseffekt beträgt 1.05 Einheiten.

Berechnung des Einkommenseffektes

Der **Einkommenseffekt** ist die Differenz zwischen der Nachfrage beim SE (10.95 Einheiten) und der Nachfrage nach der Preiserhöhung (ohne das fiktive Einkommen):

$$\text{EE} = 10 - 10.95 = -0.95.$$

Der Eikommenseffekt beträgt 0.95 Einheiten.

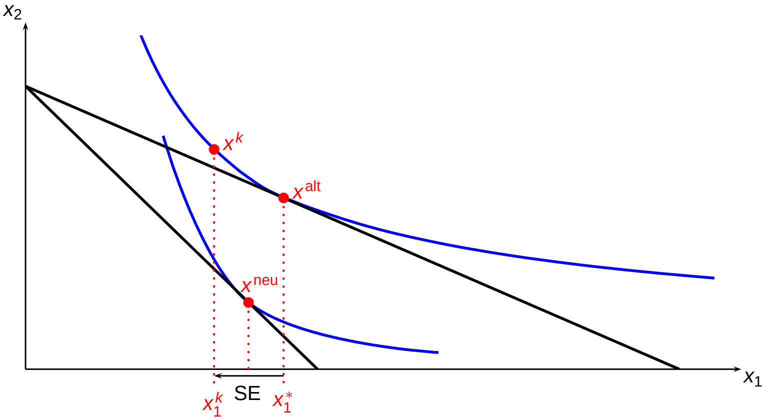
Der **Gesamteffekt** ist gleich der Summe aus SE und EE, also $1.05 + 0.95 = 2$ Einheiten.

Slutzky–Zerlegung

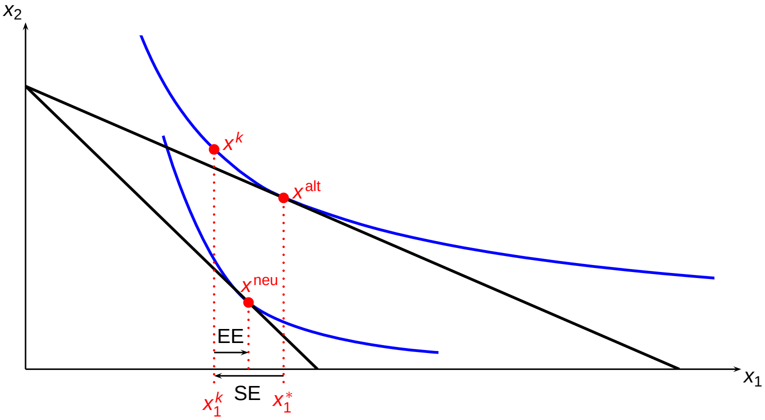
Substitutionseffekt

Der Substitutionseffekt ist immer **negativ**. D.h., wenn der Preis des Gutes steigt, geht die Nachfrage beim SE zurück. Wenn der Preis des Gutes sinkt, nimmt die Nachfrage beim SE zu. Dies gilt auch bei Giffen Gütern!

Normales, inferiores Gut



Normales, inferiores Gut



Normales, inferiores Gut

Ist ein Gut gleichzeitig normal und inferior, so gilt:

- GE ist negativ: Aufgrund der Preiserhöhung sinkt die Nachfrage von x_1^{alt} auf x_1^{neu}. Daher ist das Gut **normal**.
- SE ist immer negativ: Nachfrage sinkt von x_1^{alt} auf x_1^k.
- EE verläuft **entgegen gesetzt** zum SE, d.h. Senkung des Einkommens bewirkt Erhöhung der Nachfrage von x_1^k auf x_1^{neu}. Daher ist das Gut **inferior**.

Inferiores Gut

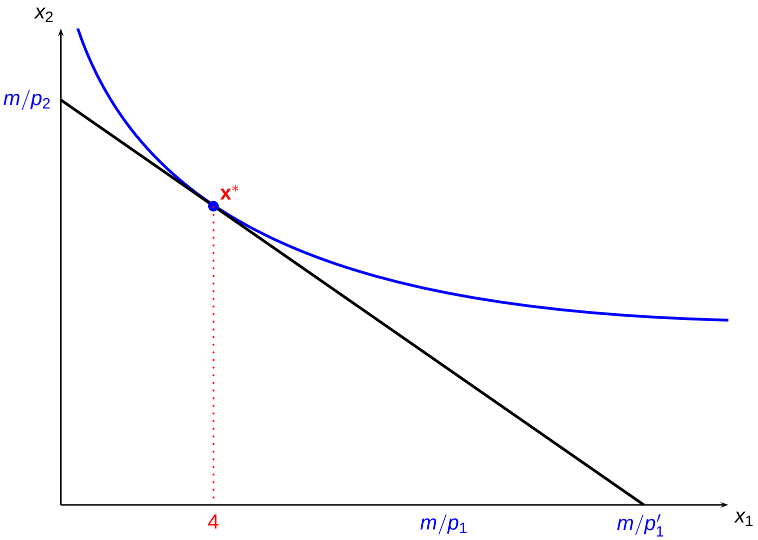
SE und EE gehen in verschiedene Richtungen und SE ist betragsmässig grösser als EE.

Giffen–Gut

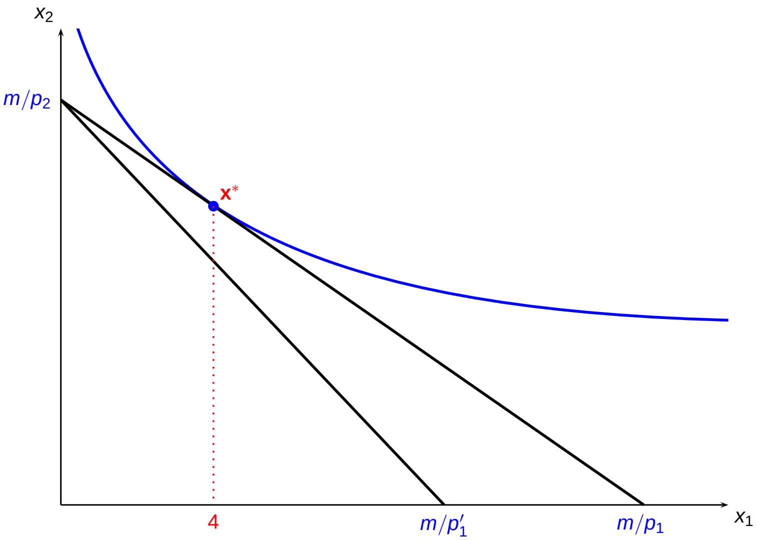
Falls SE und EE in verschiedene Richtungen gehen, aber SE betragsmässig kleiner ist als EE, dann handelt es sich um ein **Giffen–Gut**.

Der GE ist dann positiv: Preissenkung bewirkt Senkung der Nachfrage und Preiserhöhung bewirkt Erhöhung der Nachfrage.

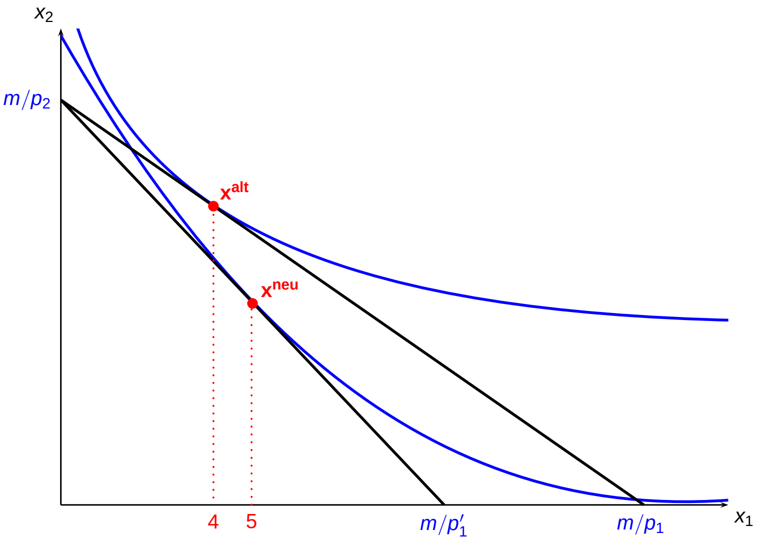
Giffen Gut



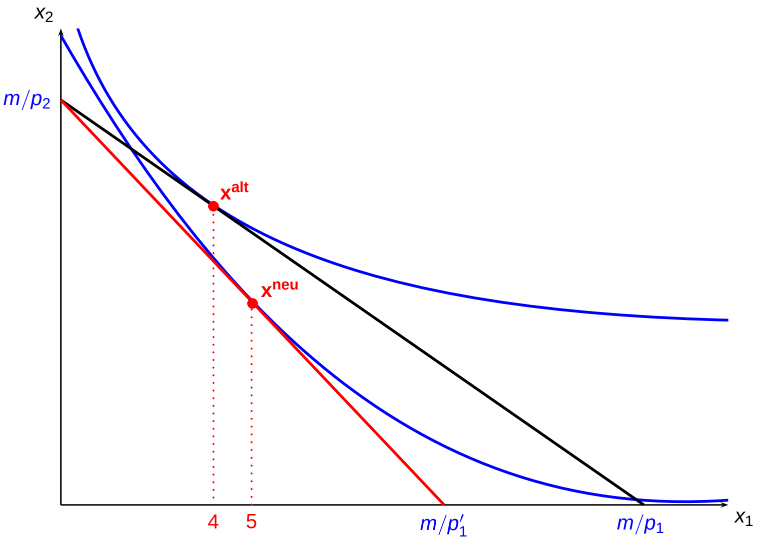
Giffen Gut



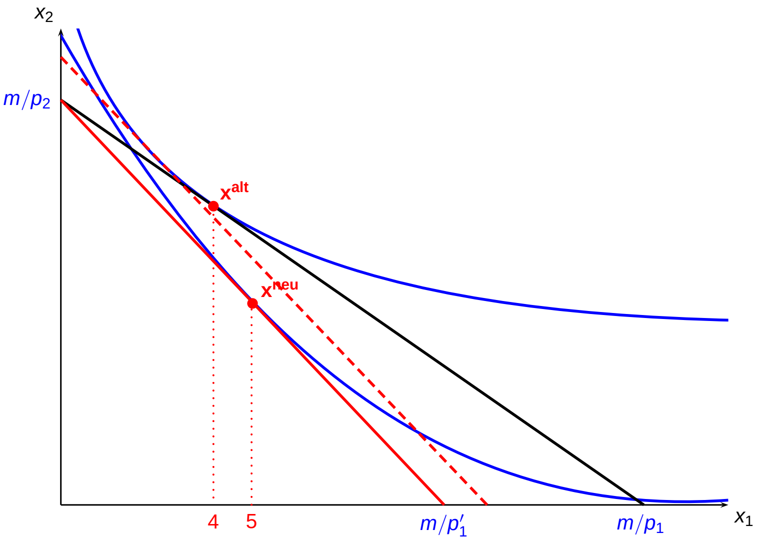
Giffen Gut



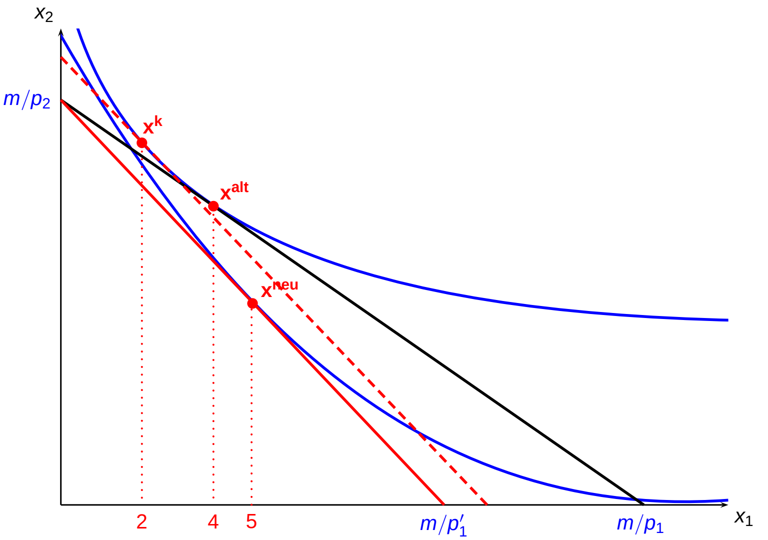
Giffen Gut



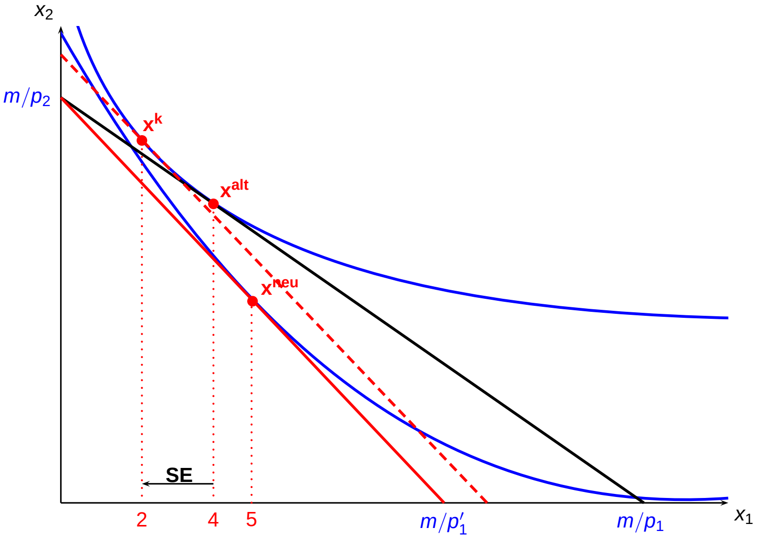
Giffen Gut



Giffen Gut

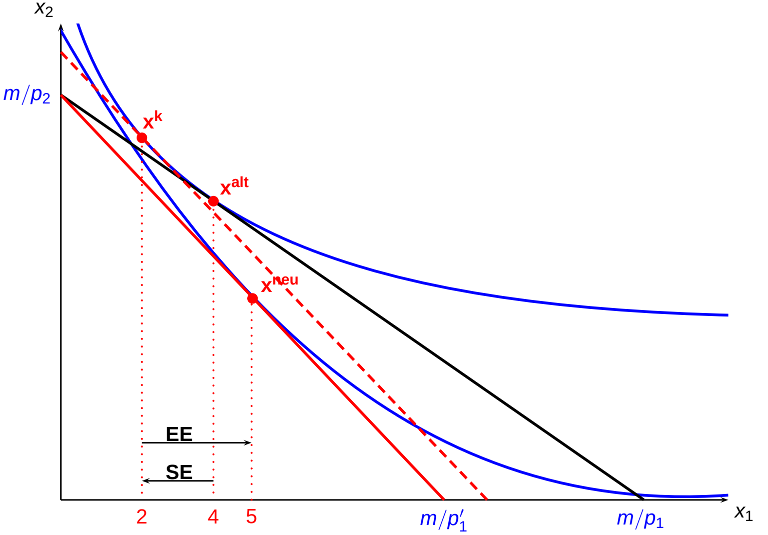


Giffen Gut

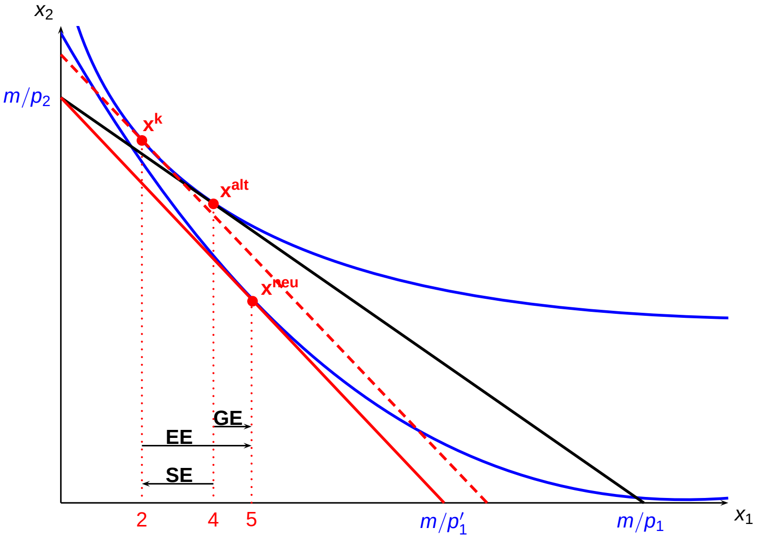


x_2
m/p_2
$\mathbf{x}^{\mathbf{k}}$
$\mathbf{x}^{\mathbf{alt}}$
$\mathbf{x}^{\mathbf{neu}}$
SE
2
4
5
m/p_1'
m/p_1
x_1

Giffen Gut


x_2
m/p_2
$\mathbf{x}^{\mathbf{k}}$
$\mathbf{x}^{\mathbf{alt}}$
$\mathbf{x}^{\mathbf{neu}}$
EE
SE
2
4
5
m/p_1'
m/p_1
x_1

Giffen Gut



x_2
m/p_2
$\mathbf{x^k}$
$\mathbf{x^{alt}}$
$\mathbf{x^{neu}}$
GE
EE
SE
2
4
5
m/p_1'
m/p_1
x_1

Giffen–Gut

Bei einem Giffen Gut gilt:

- GE ist positiv: Aufgrund der Preiserhöhung steigt die Nachfrage von 4 auf 5. Daher liegt ein **Giffen Gut** vor.
- SE ist immer negativ: Nachfrage sinkt von 4 auf 2.
- EE verläuft **entgegen gesetzt** zum SE, d.h. Senkung des Einkommens bewirkt Erhöhung der Nachfrage von 2 auf 5. Daher ist das Gut **inferior**.

Giffen Gut

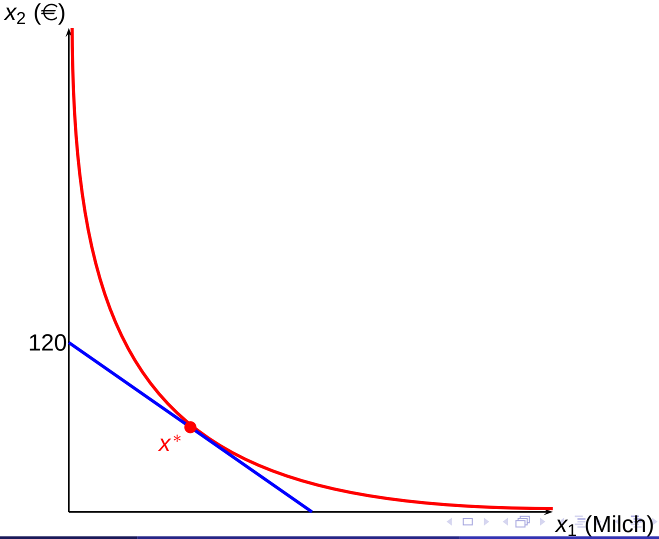
SE und EE gehen in verschiedene Richtungen und EE ist betragsmässig grösser als SE. Jedes Giffen Gut ist automatisch auch inferior.

Drei mögliche Fälle:

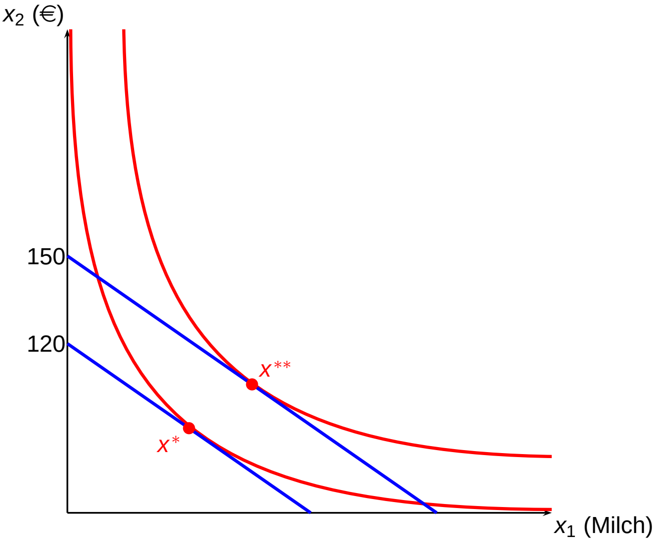
1. Das Gut ist **normal und superior**: SE und EE wirken in die selbe Richtung. Preiserhöhung und Einkommenssenkung führen zu Nachfragerückgang.
2. Das Gut ist **normal und inferior**: SE und EE wirken in entgegengesetzte Richtungen. SE stärker als EE. Nachfrage sinkt aufgrund einer Preiserhöhung.
3. Das Gut ist **Giffen Gut und inferior**: SE und EE wirken in entgegengesetzte Richtungen. SE schwächer als EE. Nachfrage steigt aufgrund einer Preiserhöhung.

Einkommensexpansionspfad

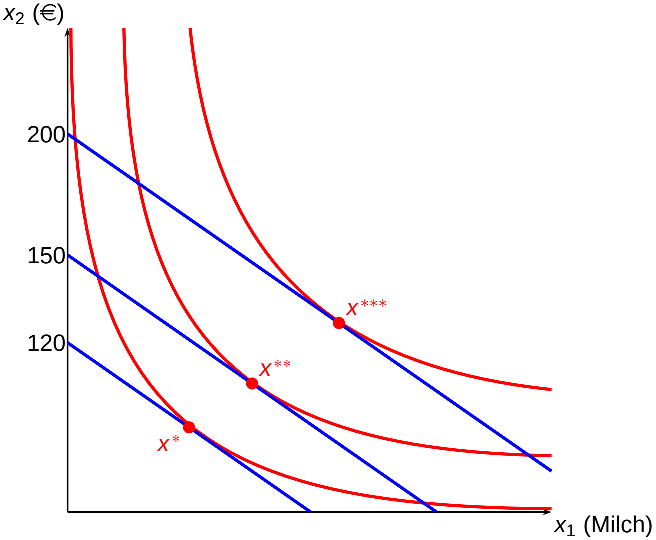
Wir betrachten verschiedene Einkommen: $m = 120$, $m' = 150$, $m'' = 200$.



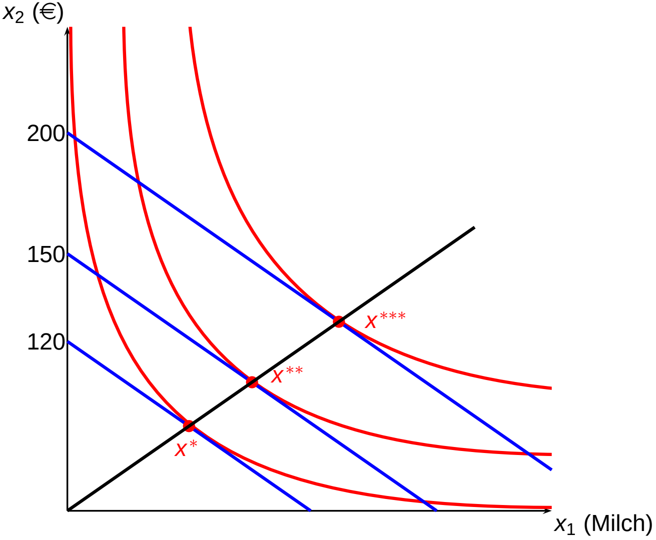
Variation des Einkommens



Variation des Einkommens



Einkommensexpansionspfad



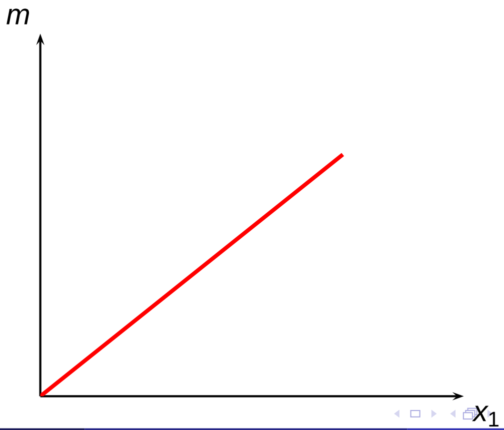
Einkommensexpansionspfad

Definition 1

Einkommensexpansionspfad Der **Einkommensexpansionspfad** verbindet alle optimalen Konsumpläne bei unterschiedlichen Einkommensniveaus und festen Preisen im x_1–x_2–Diagramm.

Definition 2

Engelkurve Die **Engelkurve** für Gut 1 stellt die Nachfrage nach Gut 1 bei verändertem Einkommen im x_1–m–Diagramm dar, wobei die Preise konstant gehalten werden.



Cobb–Douglas Nutzenfunktion:

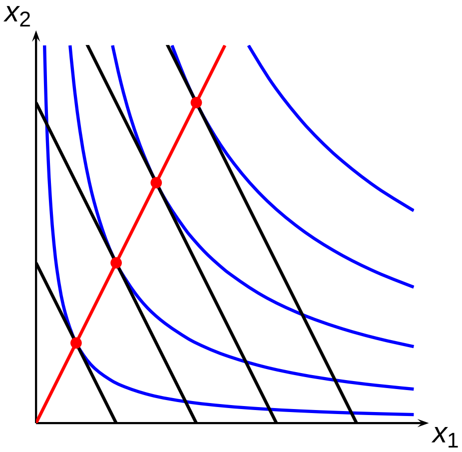
$u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}.$

Die zugehörige Nachfragefunktion nach Gut 1 ist

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{m}{2p_1}.$$

Diese Nachfragefunktion ist **linear** in m. Aus diesem Grund ist der EE eine **Gerade durch den Ursprung**.

EE für Cobb–Douglas Nutzenfunktiion



Engelkurve für Cobb–Douglas Nutzenfunktion

Die **Engelkurve für Gut 1** ergibt sich aus der Nachfragefunktion

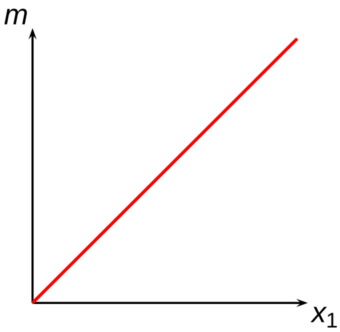
$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{m}{2p_1}$$

durch Auflösen nach m:

$$m \ = \ 2p_1x_1.$$

Dies ist eine Gerade mit der Steigung $2p_1$.

Engelkurve für Cobb–Douglas Nutzenfunktion



EE für Vollkommene Komplemente

Der Konsument möchte die beiden Güter im festen Verhältnis 3 Einheiten von Gut 1 und 2 Einheiten von Gut 2 konsumieren.

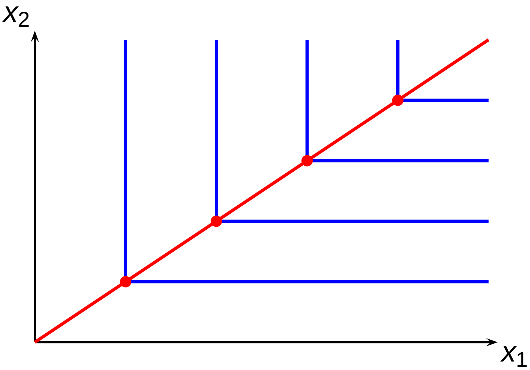
Nutzenfunktion:

$$u(x_1, x_2) = \min\left\{\frac{1}{3}x_1, \frac{1}{2}x_2\right\} = \min\{2x_1, 3x_2\}$$

Im Optimum gilt $2x_1 = 3x_2$. Auflösen nach x_2 ergibt die Gleichung für den Einkommensexpansionspfad:

$$x_2 = (2/3)x_1.$$

EE für Vollkommene Komplemente



Der EE ist eine Gerade durch den Nullpunkt mit der Steigung $2/3$.

Engelkurve für vollkommene Komplemente

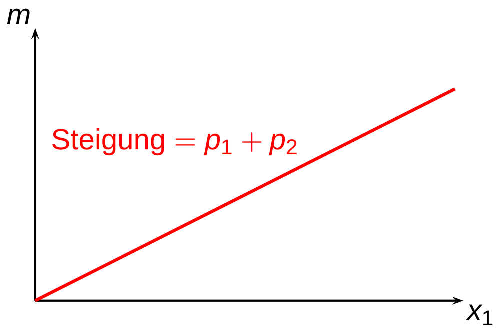
Auflösen der Nachfragefunktion nach Gut 1

$$x_1\left(p_1, p_2, m\right) = \frac{m}{p_1 + p_2}$$

nach m ergibt: $\mathbf{m = x_1\left(p_1 + p_2\right)}$.

Dies ist eine Gerade mit der Steigung $p_1 + p_2$.

Engelkurve für vollkommene Komplemente

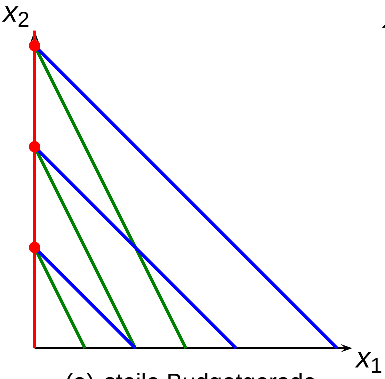


EE für Vollkommene Substitute

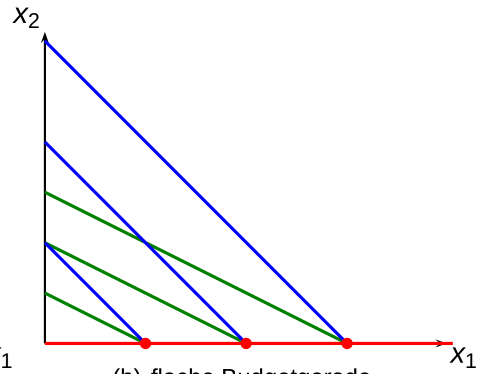
Fallunterscheidung:

1. Stimmen die Steigungen von Budgetgerade und Indifferenzkurven überein $\Rightarrow$ keine eindeutige Nachfrage und daher keine sinnvollen Aussagen zur komparativen Statik.
2. Budgetgerade steiler als die Indifferenzkurven (Fall 1): Nur Gut 2 wird nachgefragt.
3. Budgetgerade flacher als die Indifferenzkurven (Fall 2): Nur Gut 1 wird nachgefragt.

EE für Vollkommene Substitute



(a) steile Budgetgerade



(b) flache Budgetgerade

Engelkurve für perfekte Substitute

Die Nachfragefunktion für den Fall einer steileren Budgetgeraden ist

$$x_2\,(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_2},$$

während $x_1 = 0$.

Durch Auflösen nach m ergibt sich daraus die Gleichung der Engelkurve von Gut 2 als

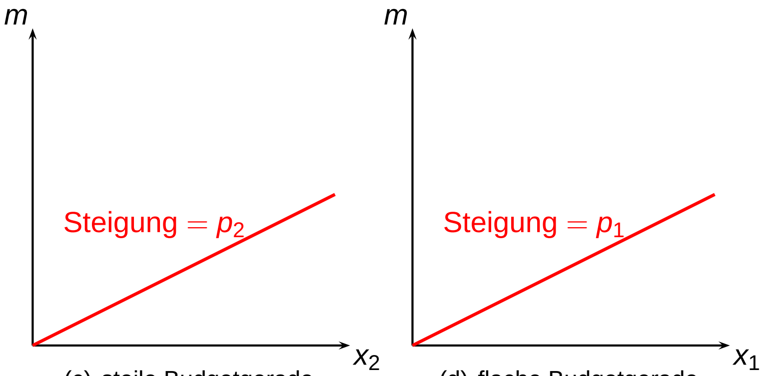
$$m = p_2\, x_2,$$

während es für Gut 1 nicht sinnvoll ist, die Engelkurve zu betrachten (sie müsste auf der m-Achse verlaufen).

Analog sollte man für flachere Budgetgeraden sinnvollerweise nur die Engelkurve für Gut 1 betrachten, die sich ergibt als

$$m = p_1\, x_1.$$

Engelkurve für perfekte Komplemente



(c) steile Budgetgerade (d) flache Budgetgerade

Elastizität

Frage: Um wieviel Prozent sinkt die Nachfrage nach einem Gut, wenn der Preis des Gutes um 1 % steigt?

$$\frac{\%\ \text{Änderung der Nachfrage}}{\%\ \text{Änderung des Preises}}$$

Elastizität

Der Ausdruck

$$\frac{\%\ \text{Änderung der Nachfrage}}{\%\ \text{Änderung des Preises}}$$

ist äquivalent zu

$$\frac{\dfrac{\left[X_1\left(\bar{p}_1 + \Delta p_1\right) - X_1\left(\bar{p}_1\right)\right]\ \text{ME}}{X_1\left(\bar{p}_1\right)\ \text{ME}}}{\dfrac{\Delta p_1\ \text{GE/ME}}{p_1\ \text{GE/ME}}}$$

Alle Einheiten kürzen sich heraus – es handelt sich um ein **dimensionsloses Mass**.

Elastizität

$$\frac{\dfrac{[X_1(\bar{p}_1 + \Delta p_1) - X_1(\bar{p}_1)] \text{ ME}}{X_1(\bar{p}_1) \text{ ME}}}{\dfrac{\Delta p_1 \text{ GE/ME}}{p_1 \text{ GE/ME}}} = \frac{\dfrac{\Delta X_1}{X_1}}{\dfrac{\Delta p_1}{p_1}}$$

ist äquivalent zu

$$\frac{\Delta X_1}{\Delta p_1} \cdot \frac{p_1}{X_1} \tag{1}$$

Elastizität

Wir betrachten nun **Marginale Änderungen:**

$$\frac{\Delta X_1}{\Delta p_1} \cdot \frac{p_1}{X_1}$$

$$\lim_{\Delta p_1 \to 0} \frac{\Delta X_1}{\Delta p_1} \cdot \frac{p_1}{X_1} = \frac{\partial X_1}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{X_1} = \epsilon_{p_1}(p_1).$$

Elastizität

- Dieses Konzept wird als **Preiselastizität der Nachfrage** bezeichnet.
- Es handelt sich ein lokales Konzept.
- D.h., die Elastizität der Nachfragefunktion hängt ab von dem Punkt, an dem gemessen wird.

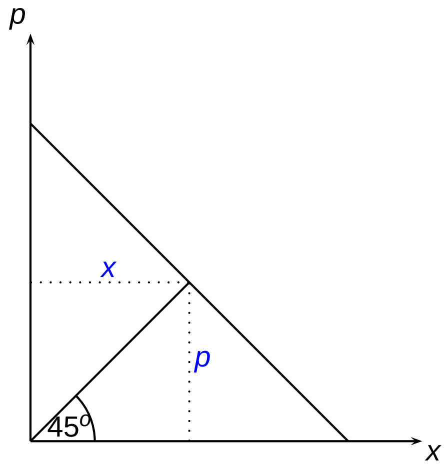
Definition 3 (elastische, einheits–, unelastische Nachfrage)

Die Nachfragefunktion $x_i\,(p, m)$ reagiert auf eine Änderung des Preises p_i

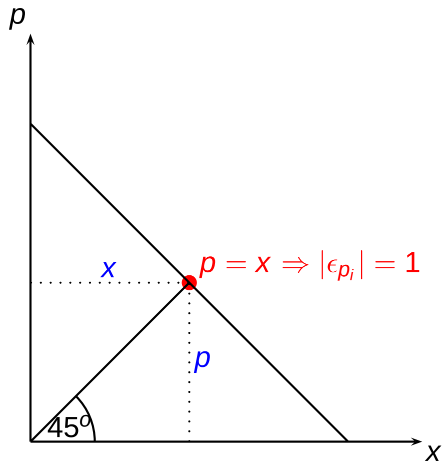
- **elastisch**, wenn $|\epsilon_{p_i}| > 1$ ist,
- **einheitselastisch**, wenn $|\epsilon_{p_i}| = 1$ ist, und,
- **unelastisch**, wenn $|\epsilon_{p_i}| < 1$ ist.

Elastizität

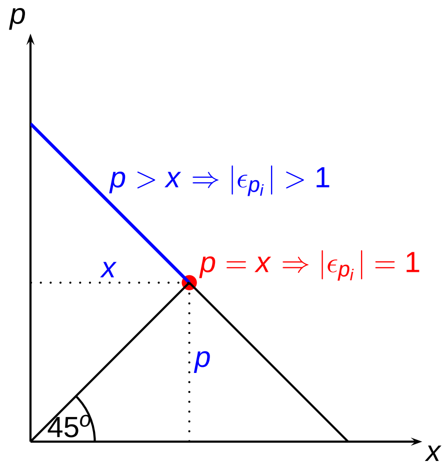
Beispiel: $x(p) = 1 - p \;\Rightarrow\; |\epsilon_{p_i}| = p/x$.



Beispiel: $x(p) = 1 - p \;\Rightarrow\; |\epsilon_{p_i}| = p/x.$

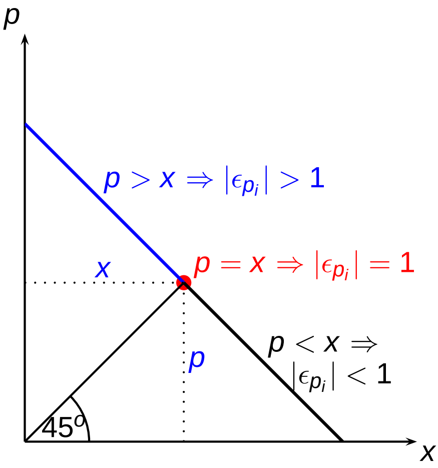


Beispiel: $x(p) = 1 - p \;\Rightarrow\; |\epsilon_{p_i}| = p/x$.



Elastizitäten

Beispiel: $x(p) = 1 - p \;\Rightarrow\; |\epsilon_{p_i}| = p/x.$



Konsumentenrente

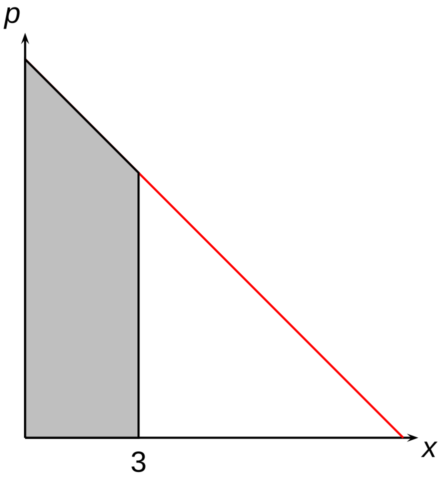
Definition 4 (Konsumentenrente)

Die Konsumentenrente ist die Differenz zwischen der **Zahlungsbereitschaft** des/der Konsumenten für eine bestimmte Menge eines Gutes und den **tatsächlichen Ausgaben** für diese Menge.

Konsumentenrente

- Die inverse Nachfragefunktion eines Konsumenten, $p(x)$, gibt seine Zahlungsbereitschaft (ZB) für die x–te Einheit des Gutes an.
- $p(1) = 5$: ZB des Konsumenten für die erste Einheit des Gutes ist 5 €.
- $p(2) = 3$: ZB des Konsumenten für die zweite Einheit des Gutes ist 3 €.
- Die gesamte Zahlungsbereitschaft des Konsumenten für z.B. 3 Einheiten ist die Fläche unter der inversen Nachfragekurve.

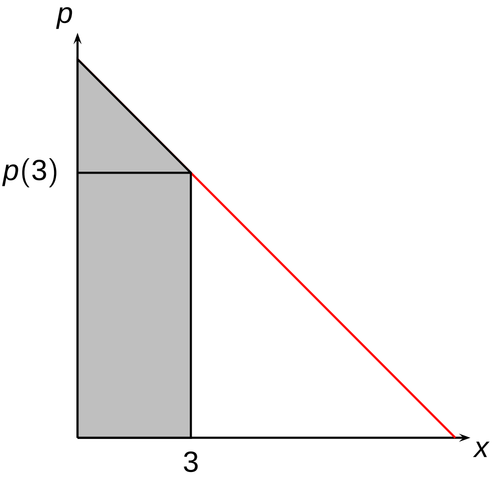
Zahlungsbereitschaft für 3 Einheiten



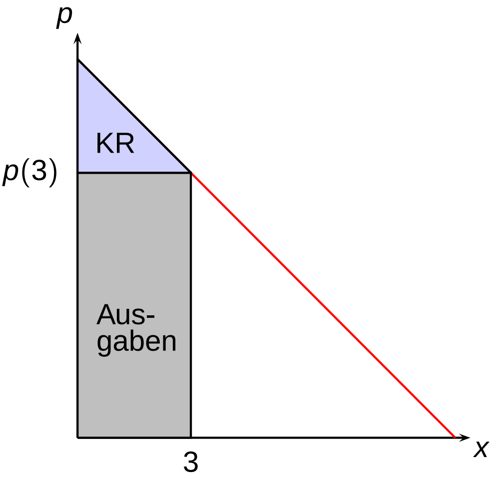
Konsumentenrente

- Die Ausgaben des Konsumenten für 3 Einheiten entsprechen der Fläche des Rechtecks mit Breite 3 und Höhe $p(3)$.
- Die Differenz zwischen dem, was er zu bezahlen bereit wäre und dem, was er tatsächlich zahlen muss, ist die **Konsumentenrente**.

Konsumentenrente



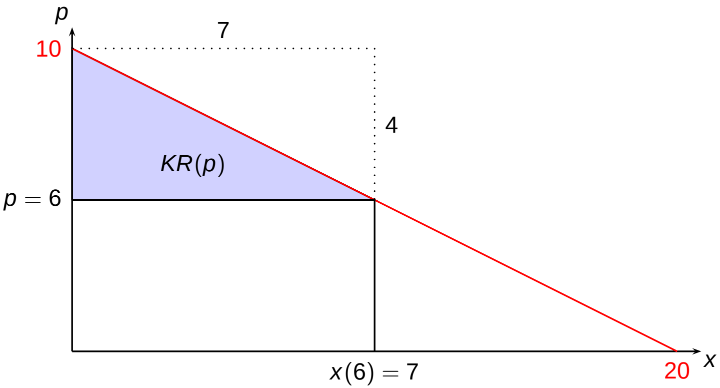
Konsumentenrente



Beispiel für die Berechnung der Konsumentenrente für den Fall einer linearen Preis–Absatz–Funktion:

$$p(x) = 10 - 0.5x.$$

Konsumentenrente



Konsumentenrente

Die **Konsumentenrente** beträgt

$$(4 \cdot 7) : 2 \; = \; 14.$$

Berechnung:
(Achsenabschnitt (10) minus Preis) $\times$ Menge (7) geteilt durch 2.

Homogenität

Definition 5 (Homogenität)

Eine Funktion $f(x_1, x_2)$ ist **homogen vom Grad k** falls für beliebiges $t > 1$ gilt

$$f(tx_1, tx_2) = t^k f(x_1, x_2).$$

Homogenität

Beispiel: Ist die Cobb Douglas Produktionsfunktion $f(x_1, x_2) = x_1^{0.5} x_2^{0.5}$ homogen?

$$f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^{0.5}(tx_2)^{0.5} = t^{0.5} x_1^{0.5} t^{0.5} x_2^{0.5}$$

$$= t^{0.5+0.5} x_1^{0.5} x_2^{0.5} = t^1 x_1^{0.5} x_2^{0.5}$$

$$= t\, f(x_1, x_2).$$

Die Funktion ist **homogen vom Grad 1** bzw. **linear homogen**.

Skalenerträge

Angenommen, wir multiplizieren beide Inputs x_1 und x_2 mit einem Faktor $t > 1$. Der resultierende Output ist

$$f(t\,x_1, t\,x_2).$$

Der Output bei den ursprünglichen Inputmengen war:

$$f(x_1, x_2).$$

Skalenerträge

Eine Produktionsfunktion $f(x_1, x_2)$ hat

- konstante SE, falls
$$\forall t > 1: \quad f(tx_1, tx_2) = t\, f(x_1, x_2),$$
- abnehmende SE, falls
$$\forall t > 1: \quad f(tx_1, tx_2) < t\, f(x_1, x_2),$$
- und zunehmende SE, falls
$$\forall t > 1: \quad f(tx_1, tx_2) > t\, f(x_1, x_2).$$

Beispiel: $f(x_1, x_2) = x_1 + x_1 x_2$.

Frage: Welche Art der SE hat diese Produktionsfunktion?

Wir multiplizieren beide Inputs mit $t > 1$:

$$f(t\,x_1, t\,x_2) = t\,x_1 + t\,x_1 t\,x_2$$

$$= t\,x_1 + t^2\,x_1 x_2 \;>\; t x_1 t x_1 x_2 = t\,f(x_1, x_2).$$

Die Funktion hat **zunehmende Skalenerträge**.

Skalenerträge und Homogenität

Für eine **linear homogene Produktionsfunktion** gilt

$$f(tx_1, tx_2) = t\ f(x_1, x_2).$$

- Der Homogenitätsgrad ist gleich 1.
- Die Definition einer linear homogenen Produktionsfunktion ist also identisch mit der Definition **konstanter Skalenerträge**.
- Daraus folgt: Lineare Homogenität und konstante Skalenerträge sind das gleiche.

Skalenerträge und Homogenität

Ist eine Produktionsfunktion **überlinear homogen**, d.h. gilt

$$f(tx_1, tx_2) = t^k f(x_1, x_2), \quad k > 1,$$

dann liegen **zunehmende Skalenerträge** vor.

- Da sowohl t als auch k grösser als 1 sind, ist auch der Ausdruck t^k grösser als t.
- Dies impliziert, dass ein Homogenitätsgrad von mehr als 1 zunehmende Skalenerträge impliziert.

Skalenerträge und Homogenität

Ist die Produktionsfunktion **unterlinear homogen**, d.h. gilt

$$f(tx_1, tx_2) = t^k f(x_1, x_2), \quad k < 1,$$

dann liegen **abnehmende Skalenerträge** vor, da für $k < 1$ der Ausdruck t^k kleiner als t ist.

Der Homogenitätsgrad lässt also eine Aussage über die Skalenerträge zu. Dies gilt aber **nicht umgekehrt**, da eine Produktionsfunktion nicht homogen sein muss.

Skalenerträge und Kosten

Es besteht ein **Zusammenhang** zwischen den Durchschnittskosten und den Skalenerträgen eines Produktionsprozesses.

Beispiel: Konstante SE, Faktorpreise $w_1 = w_2 = 1$.

x_1	x_2	y	$C(y)$	$AC(y)$
1	1	2	2	1
2	2	4	4	1
3	3	6	6	1

AC sind **konstant**.

Beispiel: Abnehmende SE, Faktorpreise $w_1 = w_2 = 1$.

x_1	x_2	y	$C(y)$	$AC(y)$
1	1	2	2	1
2	2	3	4	1.3
3	3	4	6	1.5
4	4	5	8	1.6
5	5	6	10	1.7

AC **nehmen zu**.

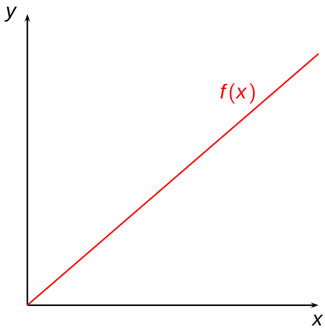
Skalenerträge und Kosten

Beispiel: Zunehmende SE, Faktorpreise $w_1 = w_2 = 1$.

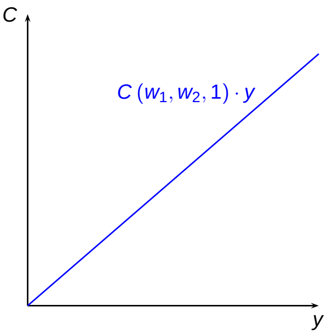
x_1	x_2	y	$C(y)$	$AC(y)$
1	1	2	2	1
2	2	5	4	0.8
3	3	8	6	0.75
4	4	12	8	0.67

AC **nehmen ab**.

Konstante Skalenerträge und Kosten

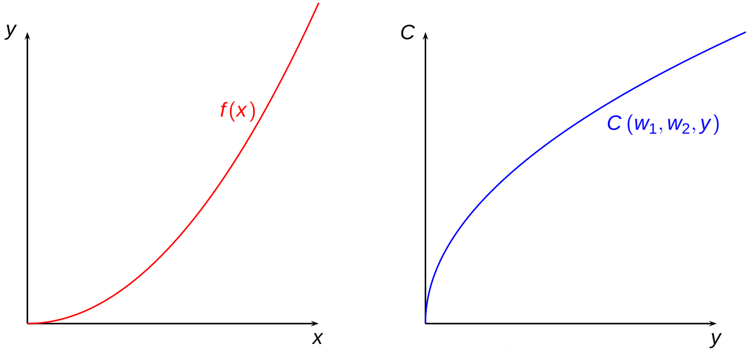


(e) Produktionsfunktion



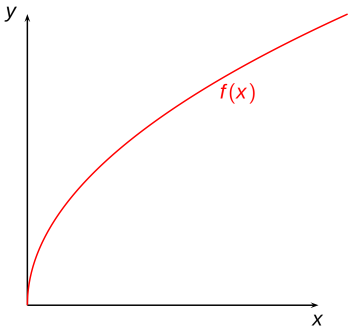
(f) Kostenfunktion

Zunehmende Skalenerträge und Kosten

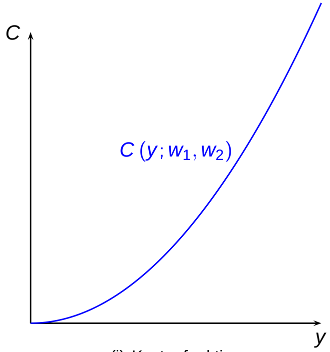


(g) Produktionsfunktion (h) Kostenfunktion

Abnehmende Skalenerträge und Kosten



(i) Produktionsfunktion



(j) Kostenfunktion

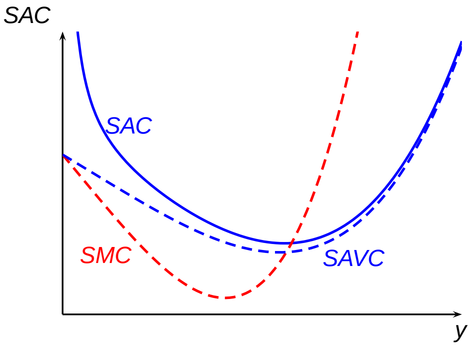
Kurz– und langfristige Kostenfunktion

- **Kurze Frist:** Mindestens ein Input kann in einem bestimmten Zeitraum nicht variiert werden.
- **Lange Frist:** Alle Produktionsfaktoren können beliebig variiert werden.

Die **kurzfristige Kostenfunktion** ist

$$C_s(y, x_1, \bar{x}_2) = \underbrace{w_1 x_1(y)}_{\text{variable Kosten}} + \underbrace{w_2 \bar{x}_2}_{\text{fixe Kosten}} .$$

Kurzfristige Durchschnitts– und Grenzkosten

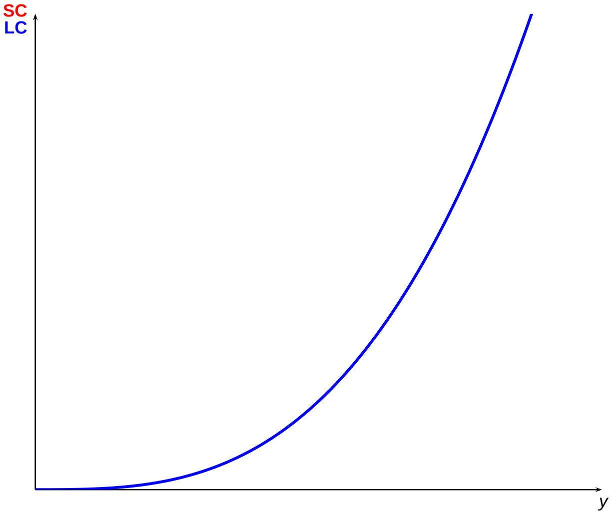


SAC: Short–run average cost, kurzfristige Durchschnittskosten.
SMC: Short–run marginal cost, kurzfristige Grenzkosten.
SAVC: Short–run average variable cost, kurzfristige variable Durchschnittskosten.

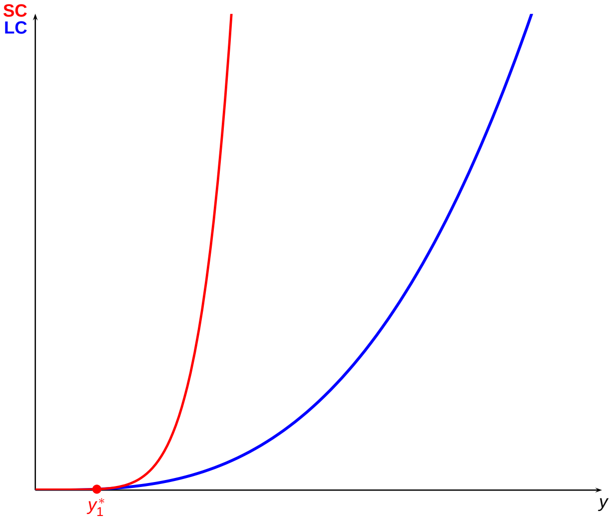
Beziehung zwischen kurz- und langfristigen Kosten und Durchschnittskosten

- Ein Unternehmen hat **kurzfristig** einen bestimmten festen Kapitalbestand $\bar{x}_2$.
- Für eine bestimmte Outputmenge y^* ist dieser Kapitalbestand optimal.
- Für höhere oder geringere Outputniveaus wäre dieser Kapitalbestand allerdings nicht optimal.
- Nur beim Outputniveau y^* stimmen kurz– und langfristige Kapitalbestände überein.
- Langfristig gibt es keine Fixkosten, daher entspring die langfristige Kostenfunktion aus dem Ursprung (kein Output, keine Kosten).

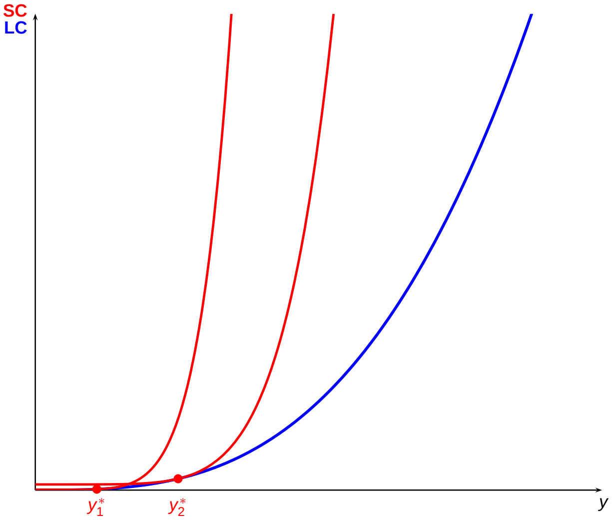
Kurz- und langfristige Kosten



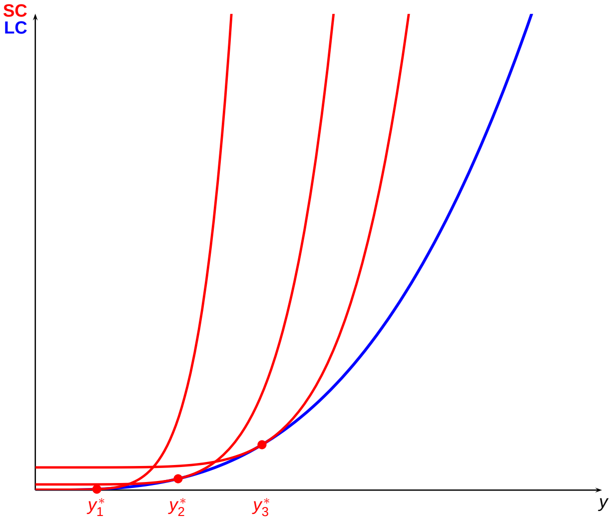
Kurz- und langfristige Kosten



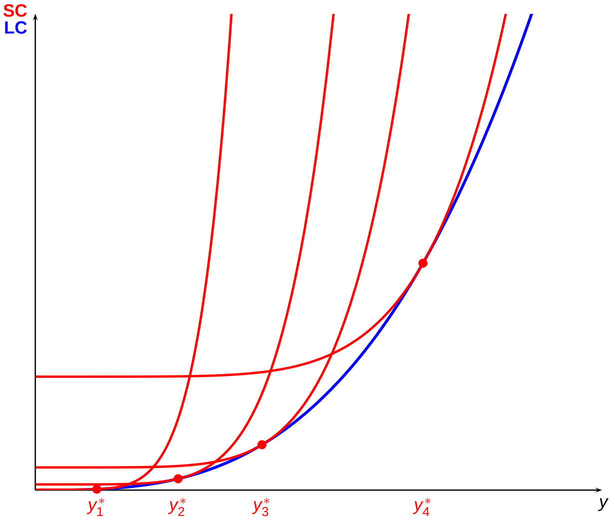
Kurz- und langfristige Kosten



Kurz- und langfristige Kosten



Kurz- und langfristige Kosten



Kurz- und langfristige Kosten

An den Punkten y_i^* sind kurz– und langfristige Kosten gleich.

Für alle anderen Outputmengen gilt:

- Die kurzfristigen Kosten sind für jedes Outputniveau mindestens so hoch wie die langfristigen.
- Die langfristige Kosten liegen immer unterhalb der kurzfristigen Kosten.
- Bei einem bestimmten Output y^* ist der kurzfristige Kapitalbestand optimal, d.h. an diesem Punkt sind kurz– und langfristige Kosten gleich.

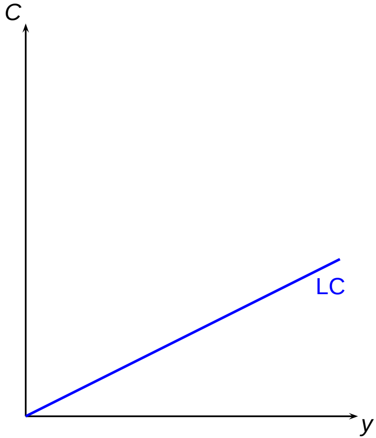
Kurz- und langfristige Kosten

Die langfristige Kostenfunktion besteht aus den ‘besten’ Punkten der kurzfristigen Kostenfunktionen.

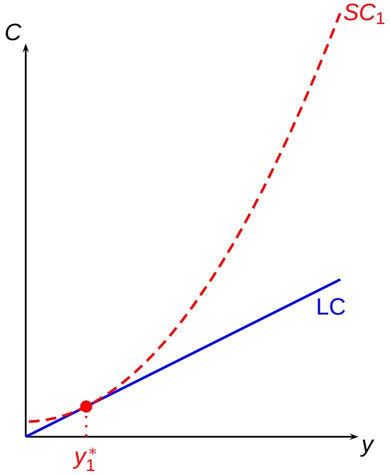
Langfristige Kostenfunktion

Die langfristige Kostenfunktion ist die **untere Hüllkurve** (engl.: lower envelope) der kurzfristigen Kostenfunktionen.

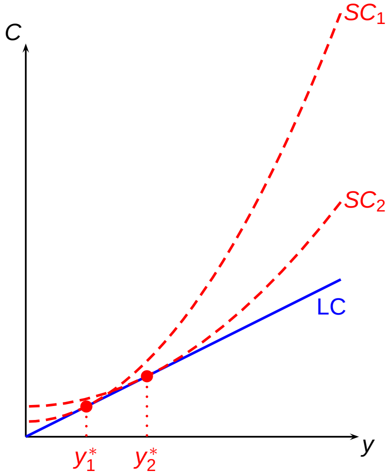
Beispiel: Kostenfunktion einer Cobb–Douglas Technologie mit konstanten Skalenerträgen



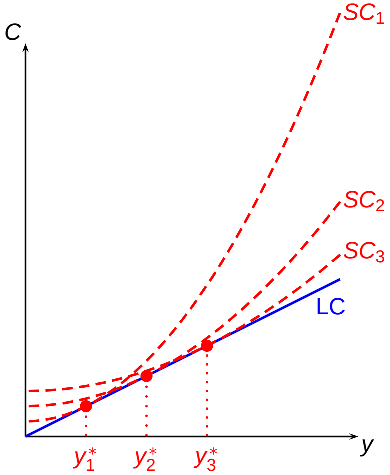
Beispiel: Kostenfunktion einer Cobb–Douglas Technologie mit konstanten Skalenerträgen



Beispiel: Kostenfunktion einer Cobb–Douglas Technologie mit konstanten Skalenerträgen



Beispiel: Kostenfunktion einer Cobb–Douglas Technologie mit konstanten Skalenerträgen



Kurzfristige Durchschnittskosten: 3 Kapitalbestände

Frage: Wie sieht die langfristige Durchschnittskostenkurve aus, wenn das Kapital nicht stetig veränderbar ist, sondern es nur **diskrete** Kapitalniveaus gibt?

Beispiele

- Ein Taxi–Unternehmen kann entweder 1, 2, 3,... Autos einsetzen, aber nicht 2.7 Autos.
- Ein Unternehmen kauft eine ganzzahlige Anzahl von Maschinen.

Kurzfristige Durchschnittskosten: 3 Kapitalbestände

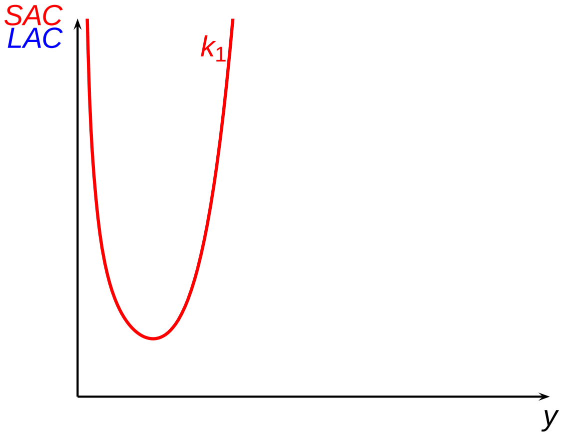


Abbildung: Kurzfristige Durchschnittskosten für diskrete Kapitalniveaus

Kurzfristige Durchschnittskosten: 3 Kapitalbestände

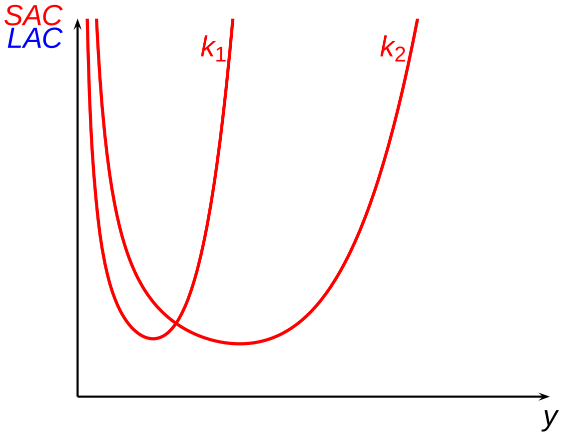


Abbildung: Kurzfristige Durchschnittskosten für diskrete Kapitalniveaus

Kurzfristige Durchschnittskosten: 3 Kapitalbestände

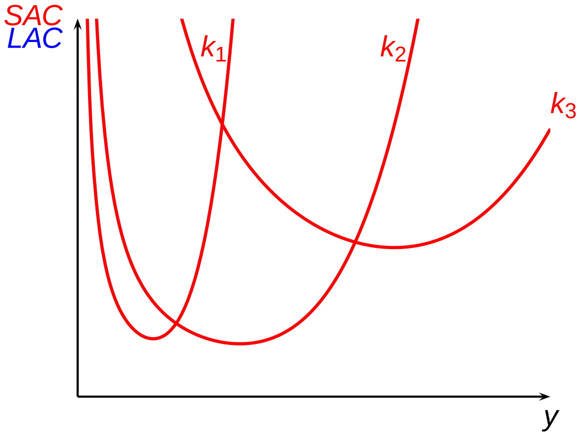


Abbildung: Kurzfristige Durchschnittskosten für diskrete Kapitalniveaus

Langfristige Durchschnittskosten: 3 Kapitalbestände

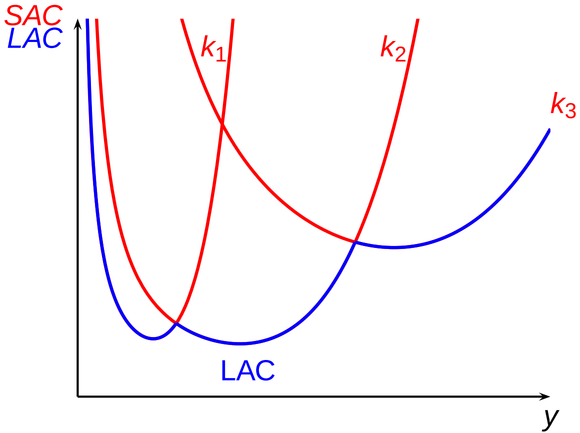
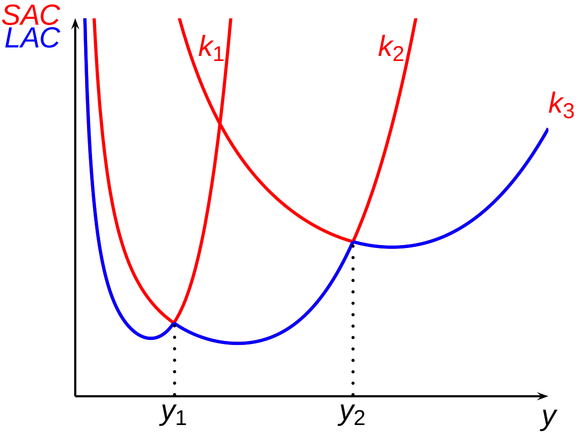


Abbildung: Langfristige Durchschnittskosten für diskrete Kapitalniveaus

Langfristige Durchschnittskosten: 3 Kapitalbestände



Für Outputniveaus kleiner als y_1 ist der Kapitalbestand k_1 optimal. Für Outputniveaus zwischen y_1 und y_2 ist k_2 optimal. Für $y > y_2$ ist k_3 optimal.