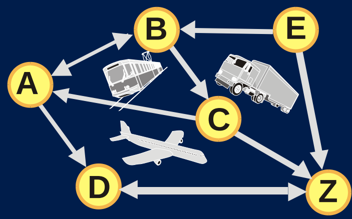

Fakultät Verkehrswissenschaften “Friedrich List”

Institut für Luftfahrt und Logistik • Professur für Verkehrsströmungslehre

Verkehrssystemtheorie I+II (V.-Wirtschaft)

Vorlesung 28.10.2011

Diskrete verkehrliche Fragestellungen / Chi-Quadrat-Test

Neufert, S.-O., Dr.-Ing.

Fakultät Verkehrswissenschaften

“Friedrich List“Dresden

Begriffserläuterungen:

Permutationen: Mögliche Reihenfolgen einer endlichen Zahl von Elementen unter Verwendung aller n Elemente

Bsp.: Ziffern 1 / 7 / 8 Mögliche 6 Permutationen: 178 / 187 / 718 / 781 / 817 / 871

Merke: Von n verschiedenen Elementen gibt es n! Permutationen.

....

Kombination / Variation:

Jede Zusammenstellung von k Elementen aus n Elementen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge nennt man Kombination.

Bsp.: Kombination ohne Wiederholung (Zurücklegen): 17 / 18 / 78
Kombination mit Wiederholung (Zurücklegen): 11 / 17 / 18 / 77 / 78 / 88

Jede Zusammenstellung von k Elementen aus n Elementen mit Berücksichtigung der Anordnung nennt man Variation.

Bsp.: Variation ohne Wiederholung (Zurücklegen): 17 / 18 / 71 / 78 / 81 / 87
Variation mit Wiederholung (Zurücklegen): 11 / 17 / 18 / 71 / 77 / 78 / 81 / 87 / 88

Mathematisch leitet sich ab:

Kombination ohne Wiederholung (Zurücklegen): $\binom{n}{k}$

Kombination mit Wiederholung (Zurücklegen): $\binom{n+k-1}{k}$

Variation ohne Wiederholung (Zurücklegen): $\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$

Variation mit Wiederholung (Zurücklegen): n^k

Diskrete Verteilungen / Diskrete verkehrliche Fragestellungen:

Die mathematischen Beziehungen für die bekanntesten diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen – Binomialverteilung / Hypergeometrische Verteilung / Poissonverteilung – finden sich in Statistikbüchern oder im Netz (siehe bspw. wikipedia).

Beispiel: Binomialverteilung $g(x) = \binom{n}{k} \cdot p^{x} \cdot (1-p)^{n-x}$

Mit: n = Stichprobenumfang / x = Anzahl der Merkmalsausprägungen /
p = (konstante) Erfolgs- bzw. Auftretenswkt. der Merkmalsausprägung

Mit der ~ lassen sich Sachverhalte mit Zurücklegen nachbilden.

Wenn n gegenüber N klein (n*10 < N) und p nicht klein (p > ?), kann in der Praxis von einer Stichprobennahme mit Zurücklegen ausgegangen werden.

Wenn n * p * (1-p) > 9, so lässt sich eine Binomialverteilung auch gut mittels Normalverteilung approximieren.

Bei Rechenproblemen mit großen Fakultäten lässt sich folgende Rekursivformel anwenden:

$$g(x+1) = g(x) \bullet \frac{n-k}{k+1} \bullet \frac{p}{1-p}$$

Diskrete Verteilungen / Diskrete verkehrliche Fragestellungen:

Rechenbeispiele:

1) Bei Kontrollen eines Nahverkehrsunternehmens wurde über einen längeren Zeitraum ein Anteil von Fahrgästen ohne gültigen Fahrausweis von 2 % ermittelt.

Wie groß ist bei einer Kontrolle von 30 Fahrgästen in einem Straßenbahnwagen die Wahrscheinlichkeit dafür

a) genau einen Fahrgast ohne gültigen Fahrausweis anzutreffen?

b) mehr als einen Fahrgast ohne gültigen Fahrausweis anzutreffen?

....

2) In einer Urne seien Entscheidungsaussagen von Personen bzgl. eines Verkehrsvorhabens gesammelt.

Insgesamt entschieden sich 6 gegen das Vorhaben, 4 stimmten dafür, 3 enthielten sich der Stimme.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei dreimaligem Zugriff

a) alle 3 Stimmenthaltungen gezogen werden ?

b) keine Nein-Stimme entnommen wird?

c) alle Stimmzettel eine einhellige Aussage wiedergeben? ...

wenn der gezogene Stimmzettel jeweils wieder in die Urne zurück gegeben wird !

....

(Lösungen in Vorlesung)

Diskrete Verteilungen / Diskrete verkehrliche Fragestellungen:

Rechenbeispiele:

3) Eine Fluglinie XY hat langfristig ermittelt, dass im Mittel 12 % ihrer Fluggäste ein Sandwich an Bord der verkehrenden Flugzeuge kaufen.

I - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer voll besetzten Boeing 737-700 (mit 189 Sitzplätzen)

a) überhaupt kein Passagier ein Sandwich kaufen möchte ?

b) alle Passagiere ein Sandwich kaufen möchten?

c) 95 Passagiere ein Sandwich kaufen möchten?

II - Wie viel Sandwiches sind an Bord mitzuführen, wenn sicherzustellen ist, dass (wahrscheinlich) 95 % aller Kundenwünsche jederzeit befriedigt werden können ?

....

(Lösungen in Vorlesung)

Diskrete Verteilungen / Diskrete verkehrliche Fragestellungen:

Beispiel: Hypergeometrische Verteilung

$$g(x) = \frac{\binom{d}{x} \bullet \binom{N-d}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Mit: N = Losumfang (GG) / d = Anzahl der Merkmalsausprägung in der GG
n = Stichprobenumfang / x = Anzahl der Merkmalsausprägungen in der SP

Mit der ~ lassen sich Sachverhalte ohne Zurücklegen nachbilden (was in der Realität oftmals bei Proben-nahme vorherrscht)

....

Rechenbeispiel:

4) Ein Fuhrunternehmen habe N = 20 Lkw, wovon vermutlich 4 sicherheitstechnische Mängel aufweisenund bei einer Kontrolle bis zur Mängelbehebung Fahrverbot bescheinigt bekämen.

Bei einer Routineuntersuchung reicht die Zeit jedoch nur zur Kontrolle von 5 Fahrzeugen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 2 Lkw mit sicherheitstechnischen Mängeln unter den 5 geprüften Lkw ermittelt werden?

Diskrete Verteilungen / Diskrete verkehrliche Fragestellungen:

Beispiel: Poissonverteilung

$$g(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \bullet e^{-\lambda}$$

Mit: λ = reelle positive Zahl

e = Eulersche Zahl

Die Poissonverteilung entsteht beim mehrmaligen Durchführen eines Bernoulli-Experiments (Zufallsexperiment, das nur zwei mögliche Ergebnisse besitzt), bei dem die Erfolgswahrscheinlichkeit dafür, ein avisiertes Ergebnis zu Erzielen, selten ist.

....

Rechenbeispiel:

5) Ein Ausleihdienst hat 3 Motorräder zu vermieten. Die Nachfrage nach Motorrädern pro Tag sei poissonverteilt mit dem Erwartungswert 2.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem bestimmten Tag

a) kein Motorrad entliehen wird ?

b) Kunden abgewiesen werden müssen ?

Diskrete Verteilungen / Diskrete verkehrliche Fragestellungen:

Beispiel: Hypergeometrische Verteilung

$$g(x) = \frac{\binom{d}{x} \bullet \binom{N-d}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Mit: N = Losumfang (GG) / d = Anzahl der Merkmalsausprägung in der GG

n = Stichprobenumfang / x = Anzahl der Merkmalsausprägungen in der SP

Mit der ~ lassen sich Sachverhalte ohne Zurücklegen nachbilden (was in der Realität oftmals bei Proben-nahme vorherrscht)

....

Rechenbeispiel:

4) Ein Fuhrunternehmen habe N = 20 Lkw, wovon vermutlich 4 sicherheitstechnische Mängel aufweisenund bei einer Kontrolle bis zur Mängelbehebung Fahrverbot bescheinigt bekämen.

Bei einer Routineuntersuchung reicht die Zeit jedoch nur zur Kontrolle von 5 Fahrzeugen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 2 Lkw mit sicherheitstechnischen Mängeln unter den 5 geprüften Lkw ermittelt werden?

Chi-Quadrat-Test (χ^2-Test):

Mit dem ~ untersucht man Verteilungseigenschaften einer statistischen Grundgesamtheit (GG).
Unterschieden wird in:

- Verteilungs- bzw. Anpassungstest: Hier wird geprüft, ob vorliegende Daten einer bestimmten Verteilung entstammen.
- Unabhängigkeitstest: Hier wird geprüft, ob zwei Merkmale stochastisch unabhängig sind.

Zum Chi-Quadrat-Anpassungstest:

Die Testgröße χ^2_{ber} fällt um so kleiner aus, je geringer die Differenzen der beobachteten Häufigkeiten f_j (klassierte Stichprobe, j Klassen) und der theoretischen Häufigkeiten h_j (hypothetisch gewähltes Modell auf die Klassengrenzen angewandt; relative Anteile mit SP-Umfang multipliziert; $h_j = h_{j,OG} – h_{j,UG}$) über allen Klassen gesehen ausfallen.

Die Prüfgröße $\chi^2_{Prüf}$ ist ein Quantil der χ^2- Verteilung (Details siehe Formelsammlung).

Wenn $\chi^2_{ber} \leq \chi^2_{Prüf}$, so kann die Nullhypothese, soweit positiv formuliert, angenommen werden.
Die Unterschiede zwischen beobachteten und theoretischen (von der Verteilung stammenden) Häufigkeiten
Werden dann als zufällig, nicht als signifikant interpretiert.
(Erläuterung der Problematik des Fehlers 1. / 2. Art erfolgt in der Vorlesung)

Chi-Quadrat-Test (χ^2-Test):

Rechenbeispiel:

6) Im Rahmen einer Fragebogenaktion zur Beurteilung des Leistungsverhaltens eines Nahverkehrssystems beantworteten 396 zufällig ausgewählte Personen eine bestimmte Detailfrage wie folgt:

Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl Urteile	60	63	74	69	59	71

Testen Sie mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$ mittels Chi-Quadrat-Anpassungstest, ob in der Grundgesamtheit alle 6 Beurteilungskategorien gleichwahrscheinlich sind.

....