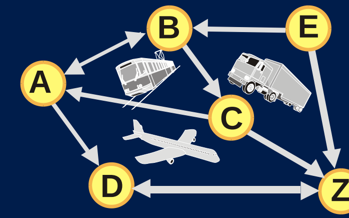
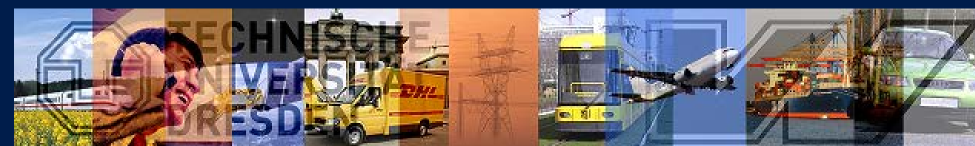


TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Verkehrswissenschaften "Friedrich List"

Institut für Luftfahrt und Logistik • Professur für Verkehrsströmungslehre



Verkehrssystemtheorie I+II (V.-Wirtschaft)

Vorlesung 11.11.2011

Stetige Verteilungen / Mathematische Behandlung …

Neufert, S.-O., Dr.-Ing.

Fakultät Verkehrswissenschaften

"Friedrich List"Dresden

Normalverteilung:

Die **Normal-** oder **Gauß-Verteilung** (nach Carl Friedrich Gauß) ist eine breit angewendete, kontinuierlich verlaufende Wahrscheinlichkeitsverteilung. Ihre Wahrscheinlichkeitsdichte wird auch Gauß-Funktion, Gauß-Kurve, Gauß-Glocke oder Glockenkurve genannt.

Die besondere Bedeutung der Normalverteilung beruht unter anderem auf dem zentralen Grenzwertsatz, der besagt, dass eine Summe von *n* unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrößen im Grenzwert normalverteilt ist. Das bedeutet, dass man Zufallsvariablen dann als normalverteilt ansehen kann, wenn sie durch Überlagerung einer großen Zahl von Einflüssen entstehen, wobei jede einzelne Einflussgröße einen im Verhältnis zur Gesamtsumme unbedeutenden Beitrag liefert.

Viele natur-, wirtschafts- und ingenieurswissenschaftliche Vorgänge lassen sich durch die NV entweder exakt oder zumindest in guter Näherung beschreiben. Bei verkehrswissenschaftlichen Fragestellungen ist zu berücksichtigen, dass die NV immer auch negative Werte mit abbildet.

Dichtefunktion: $$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Verteilungsfunktion: $$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Der Mittelwert μ liegt beim Zenit der Gauß-Kurve. Die Standardabweichung σ beschreibt die Breite der NV.
Näherungsweise gilt (für jede NV): 68,27 % aller Werte haben eine Abweichung von höchstens σ vom Mittelwert,
95,45 % aller Werte haben eine Abweichung von höchstens 2σ vom Mittelwert,
99,73 % aller Werte haben eine Abweichung von höchstens 3σ vom Mittelwert.

(Erläuterungen zur Standardisierung bzw. Normierung der NV erfolgen in der Vorlesung)

Rechenbeispiel 1:

Zwischen Dresden und Berlin wurden folgende BAB-Reisezeiten von Pkw gemessen:

Reisezeiten /min/:

100 / 70 / 110 / 180 / 95 / 90 / 120 / 130 / 100 / 110 / 105 / 150 / 135 / 80 / 140 / 110 / 100 / 90 / 170 / 115 / 140 / 100 / 110 / 145 / 90 / 120 / 120 / 115 / 130 / 150 / 120 / 100 / 80 / 115 / 145 / 110 / 105 / 95 / 160 / 120 / 90 / 150 / 120 / 105 / 115 / 110 / 140 / 130 / 120 / 130

Prüfen Sie , ob diese Fahrzeiten als normalverteilt angenommen werden können.

Welcher Anteil der Pkw ist

a) länger als die mittlere Reisezeit,

b) länger als 2,5 Stunden und

c) nicht länger als 1,5 Stunden unterwegs?

Ermitteln Sie die Reisezeit, die nur in 5% aller Fälle überschritten wird.

Bestimmen Sie die Spitzenfaktoren ψ_{95} und ψ_{99} . Leiten Sie daraus Erkenntnisse ab.

(Lösungen in Vorlesung)

Stetige Verteilungen / Mathematische Behandlung …

Klassen /min/	Klassen-grenzen /min/	Klassen-mitten /min/	beobachtete Häufigkeiten f_j	standardisierte Werte	theoretische Verteilung	$\phi(u_{j,gr})*n$ (ganzzahlig gerundet)	theoretische Häufigkeit h_j	$(f_j-h_j)^2/h_j$
	69,5							
70...83		76,5	3					
	83,5							
84...97		90,5	6					
	97,5							
98...111		104,5	14					
	111,5							
112...125		118,5	11					
	125,5							
126...139		132,5	5					
	139,5							
140...153		146,5	8					
	153,5							
154...167		160,5	1					
	167,5							
168...181		174,5	2					
	181,5							

Erlank-k-Verteilung:

Die Erlank-k-Verteilung kann sowohl symmetrisch als auch rechtsschief verlaufen, was von den beiden Formparametern k und λ vorgegeben wird.

Dichtefunktion: $f(x) = \frac{\lambda^{\kappa}}{(k-1)!} \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\lambda x}; (x \geq 0, \lambda > 0, k = 1,2,...)$ Verteilungsfunktion: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!}$

Die Verteilungsfunktion beginnt bei Null, schließt also negative Werte aus, was bei realitätsnahen, verkehrstheoretischen Betrachtungen von Bedeutung sein kann.

Für den Erwartungswert bzw. die Varianz einer erlang-k-verteilten Kenngröße gilt:

$$EX = \frac{k}{\lambda} \quad \text{und} \quad D^2 X = \frac{k}{\lambda^2} \quad .$$

Daraus leitet sich folgende Beziehung ab: $VX = \frac{1}{\sqrt{k}}$

Da in der Verteilungsfunktion eine Summe von i = 0 bis k-1 läuft, ist k ganzzahlig zu runden. Mithin ist abzuleiten, dass sich diese Verteilung versuchsweise an SPn mit einem Variationskoeffizienten größer 0 und kleiner 0,815 anpassen lässt.

Probleme bereitet bei dieser Verteilung die Umstellung nach x_S (also nach Anteilswerten einer Verteilung, die mit S % unterschritten, höchstens erreicht werden).

Eine Erlang-k=1-Verteilung entspricht der (sicherlich weitläufig bekannten) Exponentialverteilung.

(Detaillierte Erläuterung erfolgen in der Vorlesung)

Exponentialverteilung:

Die Exponentialverteilung ist in jedem Fall eine schiefe Verteilung. Sie benötigt einen Variationskoeffizient von rund 1 (ca. 0,95 bis 1,05). Einziger Formparameter ist λ .

Dichtefunktion: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}; (\lambda > 0)$

Verteilungsfunktion: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

Für den Erwartungswert gilt: $EX = \frac{1}{\lambda}$

Die Varianz berechnet sich zu: $D^2 X = \frac{1}{\lambda^2}$

Daraus lassen sich die Standardabweichung und der Variationskoeffizient ermitteln.

Im Rahmen des Chi-Quadrat-Anpassungstests besteht die Besonderheit, dass sich aufgrund DX = EX (wegen VX = 1) die Anzahl der Schätzer m bei der Bestimmung des Freiheitsgrades auf 1 reduziert.

Weibullverteilung:

Die Weibullverteilung ist unabhängig vom Variationskoeffizienten anwendbar. D.h., ihre beiden Parameter α und Θ lassen so universelle Funktionsverläufe zu, dass zunächst jede SP auf eine Weibullverteilung hin geprüft werden kann. Sie kann also symmetrisch als auch schief bis hin zu exponentiell verlaufen.

Dichtefunktion $f(x) = \frac{1}{\Theta^{\alpha}} * \alpha * x^{(\alpha-1)} * e^{-(x/\Theta)^{\alpha}}$ Verteilungsfunktion: $F(x) = 1 - e^{-(x/\Theta)^{\alpha}}$

Wie die Verteilungsfunktion zeigt, beginnt auch die Weibullverteilung bei Null.

Für den Erwartungswert gilt: $EX = \Theta * \Gamma(1 + 1/\alpha)$

Der Variationskoeffizient berechnet sich über den quadratischen Ansatz: $VX^2 = \frac{\Gamma(1+2/\alpha)}{\Gamma^2(1+1/\alpha)} - 1$

Aus beiden Werten lässt sich die Standardabweichung (in der Grundgesamtheit als Dispersion bezeichnet) ableiten: $DX = EX \bullet VX$

Wie die Formeln zeigen, setzt die Weibullverteilung auf die Gammafunktion auf (siehe Formelsammlung).

Bitte leiten Sie sich in Vorbereitung der Übungen die Berechnungsformel für x_S ab.

Umwandlung von Random-Zufallszahlen „r“ im Intervall 0....1 in Zufallszahlen x , die eine Modellverteilung nachbilden:

1. Gleichverteilung: $F(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad \Rightarrow \quad x = a + (b-a) \bullet r$

2. Normalverteilung: $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bullet \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad \Rightarrow \quad x = x_m + s_x \bullet \left(\sum_{j=1}^{12} r_j - 6 \right)$

3. Erlank-k-Verteilung: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \bullet \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda * x)^i}{i\,!} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{\lambda} \bullet \ln \left(\prod_{j=1}^{k} r_j \right)$

4. Exponentialverteilung: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\ln r}{\lambda}$

5. Weibullverteilung: $F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\Theta}\right)^{\alpha}} \quad \Rightarrow \quad x = \Theta \bullet (-\ln r)^{1/\alpha}$